Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Janvier 2022.
Contrôle optimal_EDP.
(Master2-EDP_S3) 2 heures

Epreuve finale

Questions de Cours

On considère le système parabolique généralisé (1) $\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f \text{ ds }]0,T[\\ y(0) = y_0 \end{cases}$

où $A \in \mathcal{L}(V,V')$, $f \in L^2(0,T;V')$, $y_0 \in H$ avec V et H espaces de Hilbert t.q. $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ($V \hookrightarrow H$ veut dire que V est inclus ds H avec injection continue et dense)

a) y étant solution de (1), montrer que si $y \in L^2(0,T;V)$ alors $y \in W(0,T)$. (1.5 pts)

Rappels: $W(0,T) = \{z \in L^2(0,T;V) / \partial z/\partial t \in L^2(0,T;V')\}$

$$\|z\|_{W(0,T)} = \left(\|z\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|\partial z/\partial t\|^2_{L^2(0,T;V')}\right)^{1/2} \text{ où } \|z\|^2_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T \|z(t)\|^2_V dt$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f - Ay \text{ dans }]0,T[$$

b) En déduire que $y(0)$ et $y(T) \in H$ (0.5 pt)

Rappel fondamental: Pour la suite on rappelle le théorème existenciel relatif à (1) : Trouver $y \in L^2(0,T;V)$ solution de (1) avec $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, $f \in L^2(0,T;V')$, $y_0 \in H$, $A \in \mathcal{L}(V,V')$ ($\Rightarrow a : (\varphi,\psi) \mapsto a(\varphi,\psi) = \langle A\varphi,\psi\rangle_{V',V}$ continue sur $V \times V$). Alors (1) est dit bien posé au sens d'Hadamard c.à.d. (1) admet une solution unique $y \in W(0,T)$ et cette solution dépend continûment des données c.à.d. $\exists C > 0$ (dépendant de A) t.q. $\|y\|_{W(0,T)} \leqslant C\left(|y_0|_H + \|f\|_{L^2(0,T;V')}\right)$

Problème

On se donne le syst. parabolique suivant avec contrôle réparti en temps sur $]0,T[$

$$(1_v) \begin{cases} \frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = f + Bv \text{ ds }]0,T[\\ y(0;v) = y_0 \in H \end{cases}$$

où $A \in \mathcal{L}(V,V')$, $f \in L^2(0,T;V')$, $v \in \mathcal{U}_{ad} \underset{\text{convexe fermé}}{\subset} L^2(0,T;\mathcal{U})$, $B \in \mathcal{L}(L^2(0,T;\mathcal{U}), L^2(0,T;V'))$ avec V, H et $\mathcal{U}$ $\mathbb{R}$-espaces de Hilbert t.q. $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ et $L^2(0,T;\mathcal{U})$ espace des contrôles. De plus $(\varphi,\psi) \mapsto a(\varphi,\psi) = \langle A\varphi,\psi\rangle$ coercitive

1) De quel type de contrôle il s'agit dans ce problème ? (1 pt)

2) Montrer que le pb (1_v) admet une sol. unique $y(v)$ dépendant continûment des données. (1 pt)

3) Définition de la fction coût : $J(v) = \frac{1}{2}\|Cy(v) - z_d\|^2_{L^2(0,T;H)} + \frac{1}{2}\int_0^T \langle Nv,v\rangle_{\mathcal{U}} dt$

avec $C \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V), L^2(0,T;H))$, $z_d \in L^2(0,T;H)$, $N \in \mathcal{L}(L^2(0,T;\mathcal{U}), L^2(0,T;\mathcal{U}))$ t.q. N auto-adjoint c.à.d. $\forall v,w \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ $\langle Nv,w\rangle = \langle v,Nw\rangle$ et N coercif sur $\mathcal{U}$ ($\exists \gamma > 0 / \langle Nv,v\rangle_{\mathcal{U}} \geq \gamma \|v\|^2_{\mathcal{U}}$ $\forall v \in \mathcal{U}$)

3.1) Etude de la convexité de J :

3.1.a) Montrer que $\text{Appl} : L^2(0,T;\mathcal{U}) \to L^2(0,T;H)$, $v \mapsto Cy(v)$ est affine c.à.d. montrer que l'on peut écrire $Cy(v) = \mathcal{A}'v + \mathcal{B}'$ avec $\mathcal{A}' = C\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}' = C\mathcal{B}$ où $y(v) = \mathcal{A}v + \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$?, $\mathcal{B}$?) (1pt)

<u>3.1.b)</u> Montrer directement que "Appl" est continue sans utiliser le pb homogène associé à (1_v) où $\mathcal{B}' = O$ $\left(\Leftrightarrow f = O_{L^2(0,T;V')} \text{ et } y_0 = O_H\right)$ (1pt)

<u>3.1.c)</u> Montrer que J est convexe (2pts) <u>Rappel</u>: J convexe $\Leftrightarrow \langle J'(v) - J'(w), v - w\rangle \geq 0$

<u>Indication</u>: $\langle J'(v), w\rangle_{L^2(0,T;\mathcal{U})} = \int_0^T \langle \mathcal{A}'w, Cy(v) - z_d\rangle_H dt + \int_0^T \langle Nv, w\rangle_{\mathcal{U}} dt$ $\forall v, w \in L^2(0,T;\mathcal{U})$

<u>3.1.d)</u> En déduire que J est strict. convexe (0.5pt) <u>Rappel</u>: J strict. convexe $\Leftrightarrow$ J' strict. monotone.

<u>3.2)</u> Etude de la continuité de J : Montrer que J est continue. (1pt)

<u>3.3)</u> Montrer que J est infinie à l'∞ c.à.d. $J(v) \longrightarrow +\infty$ qd $\|v\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} \longrightarrow \infty$. (1pt)

<u>3.4)</u> En déduire que le pb$(\mathcal{P})$: $\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$ admet une sol. optimale unique $u \in \mathcal{U}_{ad}$ (1pt)

<u>3.5)</u> En déduire aussi l'inéquation d'Euler vérifiée par u solution optimale unique de $(\mathcal{P})$. (1pt) <u>Indication</u>: Utiliser l'indication de <u>3.1.c)</u>.

4) <u>Introduction de l'état adjoint</u> : le système de l'état adjoint s'écrit comme suit

$$(3) \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = C^*(Cy(u) - z_d) & \text{ds }]0,T[\\ p(T) = O_H \end{cases}$$

<u>4.1)</u> Par un changement de variables adéquat, montrer que l'on peut écrire le pb (3) sous forme de : $(3')\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + A^*p = C^*(Cy - z_d) & \text{ds }]0,T[\\ p(0) = O_H \end{cases}$ <u>Remarque</u> : $(3) \Leftrightarrow (3')$ (1pt)

<u>4.2)</u> Montrer que (3') est du même type que le syst. d'état direct (1_v). (1pt)

<u>4.3)</u> En déduire que le pb (3) est bien posé au sens d'Hadamard. (1pt)

5) Sans utiliser le lagrangien, trouver l'inéquation d'Euler vérifiée par le contrôle optimal u en fction de l'état adjoint p (solution unique de (3)). (3pts)

<u>Indications</u>:

- $\langle J'(u), v-u\rangle = \int_0^T \langle Cy(u) - z_d, C(y(v) - y(u))\rangle_H dt + \int_0^T \langle Nu, v-u\rangle_{\mathcal{U}} dt \geq 0$ $\forall v \in \mathcal{U}_{ad}$
- Utiliser l'opérateur adjoint C^* de C pour pouvoir impliquer l'équation de l'état adjoint dans l'expression de $\langle J'(u), v-u\rangle$.
- Utiliser aussi une intégration par parties par rapport à la variable t intervenant dans le 1er membre de l'équation de l'état adjoint et faire apparaître la différence des premiers membres des équations des états directs (1_v) et (1_u). Enfin, remplacer cette différence par celle des seconds membres de ces mêmes équations.

6) Ecrire le système d'optimalité regroupant le système de l'état direct par rapport au contrôle optimal u, le système de l'état adjoint et enfin l'expression finale de l'inéquation d'Euler déterminée en 5). (1.5 pts)

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Janvier 2022.
Contrôle optimal_EDP (Master2-EDP_S3)

Corrigé de l'épreuve finale

Questions de cours

a) y solution de (1) et $y \in L^2(0,T;V) \Rightarrow y(t) \in V \ \forall t \in]0,T[\Rightarrow Ay(t) \in V' \ \forall t \in]0,T[$
$\Rightarrow \|Ay(t)\|_{V'} \leq C_A \|y(t)\|_V \ \forall t \in]0,T[$ car $A \in \mathcal{L}(V,V') \Rightarrow \|Ay(t)\|^2_{V'} \leq C_A^2 \|y(t)\|^2_V$ 0,5pt
$\Rightarrow \int_0^T \|Ay(t)\|^2_{V'}\,dt \leq C_A^2 \int_0^T \|y(t)\|^2_V\,dt < \infty$ car $y \in L^2(0,T;V) \Rightarrow Ay \in L^2(0,T;V')$. 0,5pt
$f \in L^2(0,T;V')$ et $\frac{\partial y}{\partial t} = f - Ay \in L^2(0,T;V') \Rightarrow y \in W(0,T)$ 0,5pt

b) $y \in W(0,T) \subset \mathcal{C}([0,T],H) \Rightarrow y(0)$ et $y(T) \in H$ (car $\forall t \in [0,T]$ $y(t) \in H$) 0.5pt

Problème

$$\begin{cases} \frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v) = f + Bv \text{ ds }]0,T[\\ y(0;v) = y_0 \in H \end{cases} \quad (1_v)$$

$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, $A \in \mathcal{L}(V,V')$, $f \in L^2(0,T;V')$, $v \in \mathcal{U}_{ad} \subset L^2(0,T;\mathcal{U})$ esp. des contrôles
$B \in \mathcal{L}(L^2(0,T;\mathcal{U}), L^2(0,T;V'))$
($\mathcal{U}_{ad}$ est un convexe fermé de $L^2(0,T;\mathcal{U})$)
De plus $(\varphi,\psi) \mapsto a(\varphi,\psi) = \langle A\varphi, \psi\rangle_{V',V}$ coercitive

1) Il s'agit d'un contrôle distribué sur l'intervalle de temps $]0,T[$ 1pt

2) $y(v)$ vérifie ttes les hypothèses du thm existentiel vu à la fin des questions de cours. Ce qui entraîne que (1_v) admet une sol. unique $y(v) \in W(0,T)$ et cette solution dépend continûment des données du pb : f, B, v et y_0. 1pt

3) $J(v) = \frac{1}{2}\left[\|Cy(v) - z_d\|^2_{L^2(0,T;H)} + \int_0^T \langle Nv, v\rangle_{\mathcal{U}}\,dt\right]$ avec $C \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V), L^2(0,T;H))$,
$z_d \in L^2(0,T;H)$, $N \in \mathcal{L}(L^2(0,T;\mathcal{U}), L^2(0,T;\mathcal{U}))$ t.q. N auto-adjoint sur $L^2(0,T;\mathcal{U})$ et coercif sur $\mathcal{U}$.
$\langle Nv, w\rangle_{L^2(0,T;\mathcal{U})} = \langle v, Nw\rangle_{L^2(0,T;\mathcal{U})}$ $\quad \langle Nv, v\rangle_{\mathcal{U}} \geq \gamma \|v\|^2_{\mathcal{U}}$ $\forall v \in \mathcal{U}$

3.1) Convexité de J :

3.1.a) Puisque d'après (1_v) $y(v) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)^{-1}(f + Bv)$ ($\frac{\partial}{\partial t} + A$ étant inversible sur $\{z \in L^2(0,T;V) / z(0) = y_0\}$)
$= \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)^{-1} f + \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)^{-1} Bv$ sur $]0,T[$ et $y(0;v) = y_0$
alors on peut prendre comme opérateur lin. $\mathcal{A}$, l'opérateur :

$$\mathcal{A} : v \mapsto \mathcal{A}v = \begin{cases} (\partial/\partial t + A)^{-1} Bv & \text{sur }]0,T[\\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$ 0.5pt

et comme fction $\mathcal{B}$ indép. de v, la fction :

$$\mathcal{B} = \begin{cases} (\partial/\partial t + A)^{-1} f & \text{sur }]0,T[\\ y_0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$ 0.5pt

$\mathcal{A}$ est linéaire car $(\partial/\partial t + A)^{-1}$ est linéaire ($\partial/\partial t + A$ étant lin.) et B est linéaire % à v.
Enfin $Cy(v) = C(\mathcal{A}v + \mathcal{B}) = C\mathcal{A}v + C\mathcal{B} = \mathcal{A}'v + \mathcal{B}'$ (C étant linéaire aussi)
Ce qui montre que $Appl : v \mapsto Appl(v) = Cy(v)$ est Affine % à v.

3.1.b) $Appl$ est continue % à v puisque $v \mapsto f + Bv$ cont. % à v de $L^2(0,T;\mathcal{U})$ ds $L^2(0,T;V')$ (car $B \in \mathcal{L}(L^2(0,T;\mathcal{U}), L^2(0,T;V'))$ et f ne dépend pas de v), 0.25 de plus $y(v)$ continue % à $f + Bv$ ($f + Bv$ est une donnée % à $y(v)$ ds le pb (1_v) qui est bien posé au sens d'Hadamard) 0.25
ce qui montre que $v \mapsto y(v)$ cont. % à v par composition d'applications continues. 0.25
Enfin $C \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V), L^2(0,T;H)) \Rightarrow y(v) \mapsto Cy(v)$ continue $\Rightarrow v \mapsto Cy(v)$ continue 0,25

3.1.c)

$$\langle J'(v), w\rangle_{L^2(0,T;\mathcal{U})} = \int_0^T \langle \mathcal{A}' w(t), Cy(v) - z_d(t)\rangle_H dt + \int_0^T \langle Nv, w\rangle_{\mathcal{U}} dt$$

Comme $\mathcal{A}'(w-v) = \mathcal{A}'w - \mathcal{A}'v = \underbrace{(\mathcal{A}'w + \mathcal{B}')}_{Cy(w)} - \underbrace{(\mathcal{A}'v + \mathcal{B}')}_{Cy(v)} = Cy(w) - Cy(v)$

alors $\langle J'(v), w-v\rangle = \int_0^T \langle \mathcal{A}'(w-v), Cy(v) - z_d\rangle_H dt + \int_0^T \langle Nv, w-v\rangle_{\mathcal{U}} dt$ (0.5pt)

$$= \int_0^T \langle Cy(v) - z_d, C(y(w) - y(v))\rangle_H dt + \int_0^T \langle Nv, w-v\rangle dt$$

Dc $\langle J'(v), v-w\rangle = \int_0^T \langle Cy(v) - z_d, C(y(v) - y(w))\rangle_H dt + \int_0^T \langle Nv, v-w\rangle_{\mathcal{U}} dt$

et $\langle J'(w), v-w\rangle = \int_0^T \langle Cy(w) - z_d, C(y(v) - y(w))\rangle_H dt + \int_0^T \langle Nw, v-w\rangle_{\mathcal{U}} dt$ (0.5pt)

$$\Rightarrow \langle J'(v) - J'(w), v-w\rangle = \int_0^T \langle Cy(v) - z_d - Cy(w) + z_d, C(y(v) - y(w))\rangle_H dt$$
$$+ \int_0^T \langle N(v-w), v-w\rangle_H dt$$ (0.5pt)

$$= \int_0^T \langle C(y(v) - y(w)), C(y(v) - y(w))\rangle_H dt$$
$$+ \int_0^T \langle N(v-w), v-w\rangle_{\mathcal{U}} dt$$ (0.5pt)

$$\Rightarrow \langle J'(v) - J'(w), v-w\rangle \geqslant \int_0^T |C(y(v) - y(w))|_H^2 dt + \gamma \int_0^T \|v-w\|_{\mathcal{U}}^2 dt$$ (coercivité de N)

$\geqslant 0 \Rightarrow J$ convexe $\quad \forall v, w \in L^2(0,T;\mathcal{U})$

3.1.d) Si $v \neq w \Rightarrow \|v-w\|_{\mathcal{U}} > 0 \Rightarrow \langle J'(v) - J'(w), v-w\rangle \geqslant \gamma \int_0^T \|v-w\|_{\mathcal{U}}^2 dt > 0$ (avec $v \neq w$)

$\Rightarrow J$ strictement convexe. (0.5pt)

3.2) J continue puisque $v \mapsto Cy(v)$ continue et par suite $v \mapsto Cy(v) - z_d$ continue, la fonction norme $v \mapsto \|Cy(v) - z_d\|^2_{L^2(0,T;H)}$ est conti., N continue (0.5pt) (car $N \in \mathcal{L}(L^2(0,T;\mathcal{U}), L^2(0,T;\mathcal{U}))$) et enfin la fction prod. scalaire $v \mapsto \langle Nv, v\rangle_{\mathcal{U}}$ continue. (0.5pt)

3.3) Coercivité de J

Ici, on peut montrer que J est infinie à l'infini si on arrive à montrer que J est coercive sur $L^2(0,T;\mathcal{U})$ c.à d. qu'$\exists\, \alpha_J > 0 /$ $\forall v \in L^2(0,T;\mathcal{U})$ $J(v) \geqslant \alpha_J \|v\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{U})}$.

- Par construction de J, $J(v) \geq \frac{1}{2}\int_0^T \langle Nv(t), v(t)\rangle_{\mathcal{U}} dt \geq \frac{\gamma}{2}\int_0^T \|v(t)\|^2_{\mathcal{U}} dt \to +\infty$

Donc J est infinie à l'∞. (0.5pt) (0.5pt) qd $\|v\|_{L^2(0,T;\mathcal{U})} \longrightarrow +\infty$

3.4) En effet, le pb$(\mathcal{P})$: $\inf\limits_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)$ admet une sol. optimale unique notée $u \in \mathcal{U}_{ad}$ puisque la fonctionnelle J vérifie ttes les conditions nécessaires et suffisantes à cet effet : J convexe, continue ($\Rightarrow$ s.c.i faiblement) sur $\mathcal{U}_{ad}$ (car convexe et cont. sur $L^2(0,T;\mathcal{U}) \supset \mathcal{U}_{ad}$ convexe fermé) et ∞ à l'∞ (0.5pt)
$\Rightarrow (\mathcal{P})$ admet au moins une sol. opt. et comme J est également strict. convexe
$\Rightarrow (\mathcal{P})$ admet une sol. opt. et une seule $u \in \mathcal{U}_{ad}$. (0.5pt)

3.5) De la question 3.4) $\left(J(u) = \inf\limits_{\mathcal{U}_{ad}} J(v)\right) \Longrightarrow u$ vérifie l'inéquation d'Euler sur $\mathcal{U}_{ad}$ c.à.d. $\langle J'(u), v-u\rangle \geq 0 \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$.

Comme d'après l'indication de la quest. 3.1.c) : $\langle J'(v), w\rangle = \int_0^T \langle \mathcal{A}'w, Cy(v)-z_d\rangle_H dt + \int_0^T \langle Nv, w\rangle_{\mathcal{U}} dt$

et après avoir remplacé v par u et w par $v-u$,

on obtient $\langle J'(u), v-u\rangle = \int_0^T \langle \mathcal{A}'(v-u), Cy(u)-z_d\rangle_H dt + \int_0^T \langle Nu, v-u\rangle_{\mathcal{U}} dt$

or $\mathcal{A}'(v-u) = \mathcal{A}'v - \mathcal{A}'u = \mathcal{A}'v + \mathcal{B}' - (\mathcal{A}'u + \mathcal{B}') = C(y(v) - y(u))$ (0.5pt)

On en déduit alors que $\langle J'(u), v-u\rangle = \int_0^T \langle Cy(u)-z_d, C(y(v)-y(u))\rangle_H dt + \int_0^T \langle Nu, v-u\rangle_{\mathcal{U}} dt$
$\geq 0 \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$. (0.5pt)

4) Introduction de l'état adjoint

$$(3)\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^* p = C^*(Cy(u) - z_d) & \text{ds }]0,T[\\ p(T) = 0_H \end{cases}$$

4.1) On pose $t' = T - t$. $t \in [0,T] \Leftrightarrow 0 \leq t \leq T \Leftrightarrow 0 \geq -t \geq -T \Leftrightarrow T+0 \geq T-t \geq T-T = 0$
$\Leftrightarrow t' = T - t \in [0,T]$ (0.5pt)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial t} = \dfrac{\partial p}{\partial t'}\dfrac{\partial t'}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial t'} \\ t = T \Rightarrow t' = T - t = T - T = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (3')\begin{cases} \partial p/\partial t' + A^* p = C^*(Cy(u) - z_d) & \text{ds }]0,T[\ni t' \\ p(0) = 0_H \end{cases}$$ (0.5pt)

4.2) Les hypothèses du pb $(3')$ sont les mêmes que celles du pb (1_v). En effet, $C^*(Cy - z_d) \in L^2(0,T;V')$ car $C \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V), L^2(0,T;H)) \Rightarrow C^* \in \mathcal{L}(L^2(0,T;H), L^2(0,T;V'))$ avec $Cy(u)$ et $z_d \in L^2(0,T;H)$ $(y(u) \in L^2(0,T;V))$, $A^* \in \mathcal{L}(V,V')$ et a^* continue (0.25) et coercitive (car $A \in \mathcal{L}(V,V') \Rightarrow a$ continue et, de plus, a est coercitive) ; on a aussi (0.25) $p \in L^2(0,T;V)$ (de m̂ nature que l'état direct $y(u)$) et $p(u)$ est sol. de $(3')$ alors $\frac{\partial p}{\partial t} \in L^2(0,T;V')$ et $p \in W(0,T) \subset \mathcal{C}([0,T],H) \Rightarrow p(0)$ et $p(T) \in H$. (0.25) (0.25)

4.3) Comme le pb $(3')$ vérifie les mêmes hypothèses que le pb (1_v) qui est bien posé au sens d'Hadamard ($(3')$ de m̂ nature que (1_v)) alors on en déduit que $(3')$ est, également, bien posé au sens d'Hadamard. (0.5) Or (3) est équivalent à $(3')$. Ce qui montre que (3) est aussi bien posé au sens d'Hadamard. (0.5)

5) Ds 3.5), on avait trouvé que $\langle J'(u), v-u\rangle = \int_0^T \langle Cy(u) - z_d, C(y(v)-y(u))\rangle_H dt + \int_0^T \langle Nu, v-u\rangle_{\mathcal{U}} dt \geq 0 \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$

Or $\int_0^T \langle Cy(u) - z_d, C(y(v)-y(u))\rangle_H dt = \int_0^T \langle C^*(Cy(u)-z_d), y(v)-y(u)\rangle_{V',V} dt$

$= \int_0^T \langle -\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p, y(v)-y(u)\rangle_{V',V} dt$ (d'après l'équation de l'état adjoint ds (3)) (0.5pr

$= -\int_0^T \langle \frac{\partial p}{\partial t}, y(v)-y(u)\rangle_{V',V} dt + \int_0^T \langle p, A(y(v)-y(u))\rangle_{V,V'} dt$ (A étant l'adjoint de A^*) (0.5pr

$= \int_0^T \langle p, \frac{\partial y(v)}{\partial t} - \frac{\partial y(u)}{\partial t}\rangle_{V,V'} dt - \langle \underbrace{p(T)}_{=0_H}, y(T;v) - y(T;u)\rangle_H + \langle p(0), \underbrace{y(0;v)}_{=y_0} - \underbrace{y(0;u)}_{=y_0}\rangle_H$

$+ \int_0^T \langle p, Ay(v) - Ay(u)\rangle_{V,V'} dt$ (0.5pr

$= \int_0^T \langle p, (\frac{\partial y(v)}{\partial t} + Ay(v)) - (\frac{\partial y(u)}{\partial t} + Ay(u))\rangle_{V,V'} dt$ (0.5pr

$y(v)$ sol. de (1_v) avec second membre : $f+Bv$.
$y(u)$ sol. de (1_u) avec 2<u>nd</u> membre : $f+Bu$.

$= \int_0^T \langle p, f+Bv-f-Bu\rangle_{V,V'} dt$ (0.5pr

$= \int_0^T \langle p, B(v-u)\rangle_{V,V'} dt = \int_0^T \langle B^* p, v-u\rangle_{\mathcal{U}',\mathcal{U}} dt = \int_0^T \langle B^* p, v-u\rangle_{\mathcal{U}} dt$ (0.5pr

puisqu'on a identifié l'esp. de Hilbert $\mathcal{U}$ avec son dual topol. $\mathcal{U}'$

Enfin l'inéquation d'Euler s'écrit, en fction de p, comme suit :

$\langle J'(u), v-u\rangle = \int_0^T \langle B^* p, v-u\rangle_{\mathcal{U}} dt + \int_0^T \langle Nu, v-u\rangle_{\mathcal{U}} dt \geq 0 \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$.

6) Le système d'optimalité s'écrit alors comme suit :

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{\partial y(u)}{\partial t} + Ay(u) = f + Bu \ \text{ds }]0,T[\\ y(0,u) = y_0 \end{cases} & (1_u) \ \text{(0.5pr} \\ \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = C^*(Cy(u) - z_d) \ \text{ds }]0,T[\\ p(T) = 0_H \end{cases} & (3) \ \text{(0.5pr} \\ \int_0^T \langle B^* p + Nu, v-u\rangle_{\mathcal{U}} dt \geq 0 \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad} & \text{(0.5pr} \end{cases}$$