Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Décembre 2021.
Contrôle optimal_EDP.
(Master2-EDP_S3)

# Epreuve de contrôle continu

(2 heures)

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$[1]\begin{cases} -\Delta y + \mu y = f & \text{ds } \Omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} = v & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ouvert borné connexe régulier)
$f \in L^2(\Omega)$, $v \in U_{ad}$ convexe fermé de $L^2(\Gamma)$
$\underline{V = H^1(\Omega)}$. $\mu \geq 1$

1) D'un pt de vue contrôle, que représente la fonction $v$ pour le pb [1] ? (1pt)

2) Ecrire l'équation variationnelle correspondant à [1] en précisant la forme bilinéaire "a" sur $V \times V$ et la forme linéaire "L" sur $V$. (Voir [1'] ci-après). (1pt)

3) Montrer que [1'] : $\forall \varphi \in V \quad a(y, \varphi) = L(\varphi)$ admet une solution unique ds $V$ (2 pts)

4) Montrer que l'application $App : v \longmapsto App(v) = y(v)$ est affine et continue de $L^2(\Gamma)$ dans $H^1(\Omega)$ (Ici il faut montrer que $y(v) = Av + B$ où $A$ linéaire et cont. de $L^2(\Gamma)$ ds $H^1(\Omega)$ et $B \in H^1(\Omega)$). (3.5 pts)

5) Posant $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Gamma \left(y(v)|_\Gamma - z_d\right)^2 d\sigma + \frac{N}{2}\int_\Gamma v^2 d\sigma$ où $z_d \in L^2(\Gamma)$ et $N > 0$,
Montrer que $J$ est continue, strictement convexe et infinie à l'infini (c.à.d. $J(v) \to +\infty$ qd $\|v\|_{L^2(\Gamma)} \to \infty$) (4pts) Rem. $J$ est définie sur $L^2(\Gamma)$.

Indication : Pour la convexité utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :
$$\langle J'(v), w \rangle = \int_\Gamma \left(y(v)|_\Gamma - z_d\right)(Aw)|_\Gamma \, d\sigma + N\int_\Gamma v w \, d\sigma$$

6) En déduire l'inéquation variationnelle associée à (P) : $J(u) = \inf\limits_{v \in U_{ad}} J(v)$ où $u$ est la sol. unique de (P). (1 pt)

7) Soit $p \in H^1(\Omega)$ t.q. $a^*(p, \psi) = \int_\Gamma \left(y(u) - z_d\right)\psi \, d\sigma \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)$ où $a^*(p,\psi) = a(\psi, p)$
On note par [2] cette équation variationnelle.
Montrer que [2] admet une solution unique $p$. (1.5 pts)

8) Sans utiliser la méthode du lagrangien, déterminer le système de l'état adjoint $p$ (le système doit être exprimé au sens des distributions). (1.5 pts)

Indication : On se restreint à $\mathcal{D}(\Omega)$ pour obtenir l'équation (E.D.P.) dans le système de l'état adjoint. On considère ensuite $L^2(\Gamma)$ pour obtenir la condition de Neumann au sens des distributions dans $L^2(\Gamma)$.

9) Déterminer l'expression de la dérivée directionnelle (G_dérivée) de $J$ en $u$ (solution unique de (P), Voir quest. 6)) dans la direction $v-u$, en fonction de $p$ (l'état adjoint).
c.à d. déterminer $\langle J'(u), v-u \rangle$ en fction de l'état adjoint $p$. (3pts)

Indications:

- Dans l'équation variationnelle [2] (forme faible du syst. de l'état adjoint), poser $\Psi = y(v) - y(u) \in H^1(\Omega)$.
- Dans l'équation variationnelle [1'] (forme faible du syst. de l'état direct), poser $\varphi = p$ (la solution unique de [2]).
- Se rappeler que la forme bilinéaire "a" est symétrique.
- Utiliser l'indication de la question 5) pour calculer $\langle J'(u), v-u \rangle$ après avoir remplacé $v$ par $u$ et $w$ par $v-u$.
- Enfin se rappeler que $A(v-u) = Av - Au = Av + B - Au - B = y(v) - y(u)$.

10) Déterminer le système d'optimalité (S.O.) qui regroupe le système de l'état direct, le système d'état adjoint et l'inéquation d'Euler. (1.5pts)

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Décembre 2021.
Contrôle optimal_EDP (Master2-EDP_S3)

# Corrigé de l'épreuve de contrôle continu

1) La fction $v$ représente un contrôle de type frontière pour le pb [1]. (1pt)

2) $V=H^1(\Omega)$, $\forall \varphi\in V$ $-\int_\Omega \Delta y\cdot\varphi\,dx+\mu\int_\Omega y\varphi\,dx=\int_\Omega f\cdot\varphi\,dx=\langle f,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)}$.
Appliquant la formule de Green : $-\int_\Omega\Delta y\cdot\varphi\,dx=\int_\Omega\nabla y\cdot\nabla\varphi\,dx-\int_\Gamma\frac{\partial y}{\partial n}\varphi|_\Gamma\,d\sigma$, on obtient : [1'] : $\forall\varphi\in V=H^1(\Omega)$ $a(y,\varphi)=L(\varphi)$ où $a(\varphi,\psi)=\int_\Omega\nabla\varphi\cdot\nabla\psi\,dx+\mu\int_\Omega\varphi\psi\,dx$ (1pt)
et $L(\varphi)=\langle f,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)}+\int_\Gamma v\varphi|_\Gamma\,d\sigma=\langle f,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)}+\langle v,\varphi|_\Gamma\rangle_{L^2(\Gamma)}$

3) Il suffit donc de montrer ici que "a" est cont. sur $V\times V$ et $V$-elliptique et que $L$ est cont. sur $V$. En effet, $\forall\varphi,\psi\in V$, on a :

$$|a(\varphi,\psi)|\le\int_\Omega|\nabla\varphi||\nabla\psi|\,dx+\mu\int_\Omega|\varphi\psi|\,dx \quad \text{où } |\nabla\varphi|=\left(\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\le\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)^n}\cdot\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)^n}+\mu\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \quad (1pt)$$

$$\le\mu\left(\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \text{ car } \mu\ge1$$

C.à d. $|a(\varphi,\psi)|\le\mu\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\cdot\|\psi\|_{H^1(\Omega)}$ où $C_a=\mu$ (constante de continuité de a)

"a" est $V$-elliptique car $a(\varphi,\varphi)=\int_\Omega|\nabla\varphi|^2dx+\mu\int_\Omega\varphi^2dx\ge\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)}$ (0.5pt)

"L" est cont. sur $V$ puisque $|L(\varphi)|\le\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}+\|v\|_{L^2(\Gamma)}\|\varphi|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}$
$\le\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}+C_{\gamma_0}\|v\|_{L^2(\Gamma)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$ (0,5pt)
car l'application trace $\gamma_0: H^1(\Omega)\to L^2(\Gamma)$, $\varphi\mapsto\gamma_0\varphi=\varphi|_\Gamma$ est cont. ($\exists C_{\gamma_0}>0/\forall\varphi\in H^1(\Omega)$ $\|\gamma_0\varphi\|_{L^2(\Gamma)}\le C_{\gamma_0}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$ c.à d. $\|\varphi|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}\le C_{\gamma_0}\|\varphi\|_{V=H^1(\Omega)}$)
Donc $|L(\varphi)|\le\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}+C_{\gamma_0}\|v\|_{L^2(\Gamma)}\right)\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$ $\forall\varphi\in V$.

Concl. D'après le thm de Lax-Milgram [1'] admet 1 sol. unique ds $V$ notée $y$.

4) App : $L^2(\Gamma)\to H^1(\Omega)$, $v\mapsto y(v)$. On montre alors que App est affine et continue de $L^2(\Gamma)$ dans $H^1(\Omega)$.
L'équation dans [1] peut s'écrire comme suit : $(\mu I_d-\Delta)y=f\Rightarrow y=(\mu I_d-\Delta)^{-1}f$.
La condition de Neumann ds [1] peut s'écrire comme suit : $\frac{\partial}{\partial n}y=v\Rightarrow y=\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{-1}v$
Si on écrit $y(v)=App(v)=Av+B$ alors il suffit de m.q. $A$ est lin. cont. de $L^2(\Gamma)$ ds $H^1(\Omega)$ et $B\in H^1(\Omega)$. En effet, on peut prendre, pour cela, $B$ t.q.

$$\begin{cases}(\mu I_d-\Delta)B=f & ds\ \Omega\\ B=0 & sur\ \Gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu B-\Delta B=f & ds\ \Omega\\ B=0 & sur\ \Gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=(\mu I_d-\Delta)^{-1}f & ds\ \Omega\\ B=0 & sur\ \Gamma\end{cases} \quad (0,5pt)$$

Comme application lin. $A$, on prend $A: v\mapsto Av=\begin{cases}0v & ds\ \Omega\\ (\partial/\partial n)^{-1}v & sur\ \Gamma\end{cases}$

puisque d'après [1], on a $\begin{cases}y(v)=(\mu I_d-\Delta)^{-1}f & ds\ \Omega\\ y(v)=\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{-1}v & sur\ \Gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y(v)=0v+(\mu I_d-\Delta)^{-1}f & ds\ \Omega\\ y(v)=\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{-1}v & sur\ \Gamma\end{cases}$ (1pt)

Donc on a bien $y(v)=Av+B$ avec $B\in H^1(\Omega)$ (m̂ $H^1_0(\Omega)$) et $A$ est lin. puisque $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{-1}$ lin. car c'est l'inverse d'1 opérateur linéaire.
Reste à m.q. $A$ est cont. de $L^2(\Gamma)$ ds $H^1(\Omega)$

or $A$ correspond à $y(v)=Av$ $(B=0)$ avec $y(v)$ solution du système

$(1_{hom})$ : $\begin{cases} -\Delta y(v)+\mu y(v)=0 & \text{ds } \Omega \\ \dfrac{\partial y(v)}{\partial n}=v & \text{sur } \Gamma \end{cases}$ puisque $B=0 \Leftrightarrow f=0$ car $(\mu I_d-\Delta)$ inversible

(1pt)

la formulation variationnelle correspondant à $(1_{hom})$ est $a(y,\varphi)=\langle v,\varphi\rangle_{L^2(\Gamma)}$ $\forall \varphi\in V$

où $a(y,\varphi)=\int_\Omega \nabla y.\nabla\varphi\,dx+\mu\int_\Omega y\varphi\,dx$ et $\langle v,\varphi\rangle_{L^2(\Gamma)}=\int_\Gamma v.\varphi|_\Gamma\,d\sigma$ $\forall \varphi\in V=H^1(\Omega)$. (1pt)

Donc on a $\|y\|^2_{H^1(\Omega)}=\int_\Omega y^2dx+\int_\Omega|\nabla y|^2dx \underset{\text{car } \mu\geq 1}{\leq} a(y,y)=\int_\Gamma v y|_\Gamma\,d\sigma \leq \|v\|_{L^2(\Gamma)}.\|y|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}$

$\leq C_{\gamma_0}\|v\|_{L^2(\Gamma)}.\|y\|_{H^1(\Omega)}$

$\gamma_0 : y\in H^1(\Omega)\longrightarrow \gamma_0 y=y|_\Gamma\in L^2(\Gamma)$ est continue

Donc $\|y(v)\|_{H^1(\Omega)}\leq C_{\gamma_0}\|v\|_{L^2(\Gamma)} \underset{y(v) \text{ sol. de } (1_{hom})}{\Rightarrow} \|Av\|_{H^1(\Omega)}\leq C_{\gamma_0}\|v\|_{L^2(\Gamma)}$

Donc $A$ est cont. de $H^1(\Omega)$ ds $L^2(\Gamma)$ et $C_A=C_{\gamma_0}$ est sa constante de continuité.

5) $J(v)=\frac{1}{2}\int_\Gamma (y(v)|_\Gamma-z_d)^2d\sigma+\frac{N}{2}\int_\Gamma v^2d\sigma$ où $z_d\in L^2(\Gamma)$ et $N>0$

(i) $J$ <u>est continue</u> puisque $J(v)=\frac{1}{2}\|y(v)|_\Gamma-z_d\|^2_{L^2(\Gamma)}+\frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Gamma)}$

Ns avons alors $v\longmapsto y(v)$ continue (Voir 4)) et $\gamma_0 : y\in H^1(\Omega)\longmapsto y|_\Gamma\in L^2(\Gamma)$

1pt est cont. $\Rightarrow v\longmapsto y(v)\in H^1(\Omega)\longmapsto y(v)|_\Gamma\in L^2(\Gamma)\longmapsto y(v)|_\Gamma-z_d\in L^2(\Gamma)\longmapsto \|y(v)-z_d\|_{L^2(\Gamma)}$ cont.

Enfin $v\longmapsto\|v\|^2_{L^2(\Gamma)}$ est cont. (la norme et $t\mapsto t^2$ sont 2 fctions continues)

Donc $J: v\longmapsto y(v)\in H^1(\Omega)\longmapsto y(v)|_\Gamma\in L^2(\Gamma)\longmapsto \frac{1}{2}\|y(v)|_\Gamma-z_d\|^2_{L^2(\Gamma)}+\frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Gamma)}$

est continue.

(ii) $J$ <u>est strict. convexe</u> : Calculons $\langle J'(v),w\rangle$

$$\langle J'(v),w\rangle=\lim_{\theta\to 0^+}\left(\frac{J(v+\theta w)-J(v)}{\theta}\right)=\int_\Gamma (y(v)|_\Gamma-z_d)Aw\,d\sigma+N\int_\Gamma vw\,d\sigma$$

1pt $\Rightarrow$ $\langle J'(v),w-v\rangle=\int_\Gamma (y(v)-z_d)A(w-v)\,d\sigma+N\int_\Gamma v(w-v)\,d\sigma$

or $y(v)=Av+B$ et $y(w)=Aw+B \Rightarrow y(w)-y(v)=Aw+B-Av-B=A(w-v)$

Donc $\langle J'(v),w-v\rangle=\int_\Gamma (y(v)-z_d)(y(w)-y(v))\,d\sigma+N\int_\Gamma v(w-v)\,d\sigma$

$\langle J'(v)-J'(w),v-w\rangle=\int_\Gamma (y(v)-z_d)(y(v)-y(w))\,d\sigma+N\int_\Gamma v(v-w)\,d\sigma-$

0.5pt $\int_\Gamma (y(w)-z_d)(y(v)-y(w))\,d\sigma-N\int_\Gamma w(v-w)\,d\sigma$

$=\int_\Gamma (y(v)-y(w))^2d\sigma+N\int_\Gamma (v-w)^2d\sigma\geq 0$ $\forall v,w\in L^2(\Gamma)$

$\Rightarrow J$ convexe

De plus, $(\langle J'(v)-J'(w),v-w\rangle=0 \Leftrightarrow v=w) \Rightarrow J$ strict. convexe

ou bien si $v\neq w \Rightarrow \int_\Gamma (v-w)^2d\sigma>0 \Rightarrow \langle J'(v)-J'(w),v-w\rangle>0 \Rightarrow J$ strict. convexe

0.5pt

(iii) J est infinie à l'infini

(1pt) $J(v) = \frac{1}{2}\|y(v) - z_d\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \geq \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \longrightarrow +\infty$ qd $\|v\|_{L^2(\Gamma)} \to \infty$.

Donc $J(v) \longrightarrow +\infty$ qd $\|v\|_{L^2(\Gamma)} \to \infty$

6) $u$ étant l'unique solution optimale de $(P)$ : $\inf_{v \in U_{ad}} J(v)$ (vu les conditions sur $J$ vérifiées ds 5)) alors $u$ vérifie l'inéquation variationnelle : $\langle J'(u), v-u\rangle = \int_\Gamma (y(u)|_\Gamma - z_d)(A(v-u))|_\Gamma d\sigma + N\int_\Gamma u(v-u)d\sigma$ (1pt) $\geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}$ 0.5 $\langle J'(u), v-u\rangle \geq 0$ 0.5

7) $p \in H^1(\Omega)$ t.q. $a^*(p,\Psi) = \int_\Gamma (y(u) - z_d)\Psi\, d\sigma \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega)$ [2]

a étant symétrique, $a^*(p,\Psi) = a(\Psi,p) = a(p,\Psi)$ (0.5pt)

Montrons alors que [2] admet une solution unique notée $p$.

Ns avons ~~tt~~ d'abord que $y(u)|_\Gamma - z_d \in L^2(\Gamma)$

car l'application trace $\gamma_0 : y(u) \in H^1(\Omega) \mapsto \gamma_0 y(u) = y(u)|_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ et $z_d \in L^2(\Gamma)$

Donc $y(u) - z_d = y(u)|_\Gamma - z_d \in L^2(\Gamma)$ ($\gamma_0$ est à valeurs ds $L^2(\Gamma)$)

De plus, $\Psi \in H^1(\Omega) \longmapsto \int_\Gamma (y - z_d)\Psi|_\Gamma d\sigma$ continue (1pt)

car $\left|\int_\Gamma (y-z_d)\Psi|_\Gamma d\sigma\right| \leq \|y - z_d\|_{L^2(\Gamma)} \cdot \|\Psi|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\gamma_0}\|y-z_d\|_{L^2} \cdot \|\Psi\|_{H^1(\Omega)}$

puisque $\gamma_0 : \Psi \in H^1(\Omega) \mapsto \gamma_0\Psi = \Psi|_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ cont. $\Rightarrow \exists C_{\gamma_0} > 0 \quad \|\Psi|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\gamma_0}\|\Psi\|_{H^1(\Omega)}$

$a(p,\Psi) = \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla\Psi\, dx + \mu\int_\Omega p\,\Psi\, dx \Rightarrow$ "a" cont. sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$-elliptique (Voir 3))

On en conclut alors, d'après le thm de Lax-Milgram, que $p$ est solution unique de [2].

8) D'après 7) [2] : $a^*(p,\Psi) = a(p,\Psi) = \int_\Gamma (y(u) - z_d)\Psi\, d\sigma \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega)$

Or $a(p,\Psi) = \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla\Psi\, dx + \mu\int_\Omega p\Psi\, dx = \int_\Omega (-\Delta p)\Psi\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n}\Psi\, d\sigma + \mu\int_\Omega p\Psi\, dx$

Donc [2] $\Rightarrow \forall \Psi \in H^1(\Omega)$ $\int_\Omega (-\Delta p)\Psi\, dx + \mu\int_\Omega p\Psi\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n}\Psi|_\Gamma\, d\sigma = \int_\Gamma (y(u) - z_d)\Psi|_\Gamma\, d\sigma$

Si on se restreint à $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ alors $\int_\Omega (-\Delta p)\Psi\, dx + \mu\int_\Omega p\Psi\, dx = 0 \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (1pt)

Ce qui entraine l'équation au sens des distributions (ds $\mathcal{D}'(\Omega)$) $-\Delta p + \mu p = 0$ ds $\Omega$

Par ailleurs, comme l'espace des traces des fctions de $H^1(\Omega)$ sur $\Gamma$ : $\{\Psi|_\Gamma, \Psi \in H^1(\Omega)\}$ est dense dans $L^2(\Gamma)$ alors $\int_\Gamma \frac{\partial p}{\partial n}\phi\, d\sigma = \int_\Gamma (y(u) - z_d)\phi\, d\sigma \quad \forall \phi \in L^2(\Gamma) \supset \{\Psi|_\Gamma, \Psi \in H^1(\Omega)\}$.

Ce qui entraine que $\frac{\partial p}{\partial n} = y(u) - z_d$ sur $\Gamma$ (au sens des distributions t.q.) (0.5pt)

Le système de l'état adjoint s'écrit alors comme suit : $\begin{cases} -\Delta p + \mu p = 0 & \text{ds } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = y(u) - z_d & \text{sur } \Gamma \end{cases}$

9) Dans la forme faible de l'état direct : [1'] on a

$$a(y(v),\varphi) = \langle f,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle v,\varphi\rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

On pose alors $\varphi = y(v) - y(u)$ ds la forme faible du système de l'état adjoint [2], on obtient : $a(p, y(v)-y(u)) = \int_\Gamma (y(u)-z_d)(y(v)-y(u))\, d\sigma$ ($a^* = a$ car $a$ sym.)

puis on pose $\varphi = p$ dans [1'] (puisque $p \in H^1(\Omega)$) on obtient :

$$a(y(v)-y(u),p) = a(y(v),p) - a(y(u),p) = \langle f,p\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle v,p\rangle_{L^2(\Gamma)} - \langle f,p\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u,p\rangle_{L^2(\Gamma)}$$

(1pt

$$= \langle v-u, p\rangle_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma (v-u)p\, d\sigma.$$

Ainsi, on a trouvé que $a(y(v)-y(u),p) \underset{a\,sym.}{=\!=} \int_\Gamma (y(u)-z_d)(y(v)-y(u))\, d\sigma = \int_\Gamma (v-u)p\, d\sigma$ ⊛

On se rappelle alors que dans la question 5), les calculs relatifs à la convexité de J ont conduit au résultat suivant :

$$\langle J'(v), w-v\rangle = \int_\Gamma (y(v)-z_d)A(w-v)\, d\sigma + N\int_\Gamma v(w-v)\, d\sigma$$ (Indication de la quest. 5))

et comme $A(w-v) = Aw - Av = Aw + B - Av - B = y(w) - y(v)$, on obtient alors le résultat sui : $\langle J'(v), w-v\rangle = \int_\Gamma (y(v)-z_d)(y(w)-y(v))\, d\sigma + N\int_\Gamma v(w-v)\, d\sigma$. (1pt

Donc pour calculer $\langle J'(u), v-u\rangle$, il suffit de remplacer v par u et w par v dans cette dernière égalité : $\langle J'(u), v-u\rangle = \int_\Gamma (y(u)-z_d)(y(v)-y(u))\, d\sigma + N\int_\Gamma u(v-u)\, d\sigma$.

D'où le résultat final lorsque l'on utilise l'égalité ⊛ : (1pt

$$\langle J'(u), v-u\rangle = \int_\Gamma p(v-u)\, d\sigma + N\int_\Gamma u(v-u)\, d\sigma = \int_\Gamma (p+Nu)(v-u)\, d\sigma$$

10) Enfin le système d'optimalité s'écrit de la façon suivante après avoir regroupé tous les résultats précédents

$$\begin{cases} \begin{cases} -\Delta y(u) + \mu y(u) = f & \text{ds } \Omega \\ \dfrac{\partial y(u)}{\partial n} = u & \text{sur } \Gamma \end{cases} & (0.5pt \\[2ex] \begin{cases} -\Delta p(u) + \mu p(u) = 0 & \text{ds } \Omega \\ \dfrac{\partial p(u)}{\partial n} = y(u) - z_d & \text{sur } \Gamma \end{cases} & (0.5pt \\[2ex] \langle J'(u), v-u\rangle = \int_\Gamma (p+Nu)(v-u)\, d\sigma \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \underset{\text{convexe fermé}}{\subset} L^2(\Gamma) & (0.5pt \end{cases}$$