Université de Tlemcen A.U.2021/2022
Département de Mathématiques

Controle continu
de
Introduction aux problèmes hyperboliques

Questions de Cours
Soit le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + (f(u))_x = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) ; x \in \mathbb{R} \end{array} \right. ; \tag{1}$$

Les affirmations suivantes sont elles vraies? Justifier votre réponse
(I) Si f est paire et g est impaire, alors la solution si elle existe est impaire par rapport à x.
(II)Si $f \in C^2(\mathbb{R}), g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et $g\prime \in L^\infty(\mathbb{R})$, alors (1) admet une solution unique $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,T[)$ où $T = \frac{-1}{\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} (f''(g(x)), g\prime(x).} < +\infty$.

Exercice1

Soit $\alpha > 0$, on considère le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)_x = 0, x \in \mathbb{R}^+, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) ; x \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right. ; \tag{2}$$

avec $g(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x^{\frac{1}{\alpha}}, & \text{si } x \in]0;1[\\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ /]0;1[\end{array} \right.$

1. (2)admet il des solutions classiques sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Justifier votre réponse
2. Déterminer les caractéristiques et les dessiner; et interpréter.
3. Montrer que (2) admet une solution entropique que l'on déterminera.

Exercice2

$$\left\{ \begin{array}{c} U_t + AU_x = F, \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ U(x,0) = U_0(x), \forall x \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \tag{3}$$

où $U(t,x) = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}$est une inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, A une matrice carrée constante et U_0 et F sont des fonctions régulières bornées.

1. Soit A telle que le système soit strictement hyperbolique. Montrer que le problème (3) admet une solution classique unique U .Donner son expression en fonction de U_0 et F.
2. Vérifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+} \|U(x,t)\| \leq C \left(\|U_0\|_\infty + \|F\|_\infty\right)$$

Université de Tlemcen A.U.2021/2022
Département de Mathématiques

Corrigé du controle continu
de
Introduction aux problèmes hyperboliques

Questions de Cours 6pts

Soit le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + (f(u))_x = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x); x \in \mathbb{R} \end{array} \right. ; \tag{1}$$

3pts L' affirmation(I) est vraie comme le flux f est une fonction paire, sa dérivée est une fonction impaire. On suppose que la fonction u(x, t) est une solution du problème (1).On pose, pour tout x $\in \mathbb{R}$, $v(x,t) = -u(-x,t)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(v(x,t)) &= -\frac{\partial u}{\partial x}(-x,t) + f'(v(x,t))\frac{\partial}{\partial x}(v(x,t)) \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x}(-x,t) + f'(-u(-x,t))\frac{\partial}{\partial x}(-u(-x,t)) \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x}(-x,t) - f'(u(-x,t))\frac{\partial u}{\partial x}((-x,t)) \\ &= -\left(\frac{\partial u}{\partial x}(-x,t) + f'(u(-x,t))\frac{\partial u}{\partial x}((-x,t))\right) \\ &= -\left(\frac{\partial u}{\partial x}(-x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(-x,t)))\right) = 0 \end{aligned}$$

De plus, $v(x,0) = -u(-x,0) = -g(-x) = g(x)$, puisque la condition initiale g est supposée impaire. Ainsi, v est solution du problème (1).

3pts L'affirmation (II)n'est vraie que si $(f''(g(x)), g\prime(x)) < 0$.(voir cours loi de conservation proposition page 7.)

Exercice1 8pts

Soit $\alpha > 0$, on considère le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + \left(\frac{|u|^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)_x = 0, x \in \mathbb{R}^+, t > 0 \\ u(x,0) = g(x); x \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right. ; \tag{2}$$

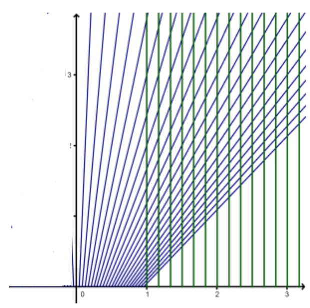
avec $g(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x^{\frac{1}{\alpha}}, & \text{si } x \in]0;1[\\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^+/]0;1[\end{array} \right.$

1. 1pt La condition initiale n'est pas continue en 1,les solutions de(2)ne peuvent etre de classe $C^1 sur\ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

2. $\boxed{\text{3pts}}$Les caractéristiques
On a : pour tout réel u, $f'(u) = signe(u)\,|u|^{\alpha}$, donc les caractéristiques sont données par

$$\text{pour tout } t \geq 0, x(t) = \begin{cases} x\,(1+t) & \text{si } x \in]0,1[\\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

Représentation graphique des caractéristiques



Les caractéristiques se croisent, il n'existe donc pas de solution classique (forte)au problème (2). On cherche donc une solution C^1 par morceaux qui admet des chocs.

3. $\boxed{\text{4pts}}$De la figure de représentation des caractéristiques, on voit que les deux familles de courbes caractéristiques interfèrent, ce qui permet de présager l' existence d' une courbe de discontinuité $\mathcal{C} = (x(t), t)$ pour u, qui commence au point $(1, 0)$ et telle que

$$u(x,t) = \begin{cases} \left(\frac{x}{t+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & \text{à gauche de } \mathcal{C} \\ 0 & \text{à droite de } \mathcal{C} \end{cases}$$

En appliquant la relation de Rankine-Hugoniot, la vitesse du choc

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= S = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{0 - \frac{1}{\alpha+1}u_g^{\alpha+1}}{0 - u_g} = \frac{1}{\alpha+1}u_g^{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha+1}\left(\left(\frac{x}{t+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}\frac{x}{t+1} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire que l'on peut résoudre explicitement, en tenant compte de la condition initiale $x(0) = 1$.

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\alpha+1}\frac{dt}{t+1} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

qui admet pour solution

$$x\,(t) = (1+t)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

La solution entropique $u(x,t)$ est alors donnée par :

$$u(x,t) = \begin{cases} \left(\frac{x}{t+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & \text{si} \quad x < (1+t)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\ 0 & \text{si} \quad x > (1+t)^{\frac{1}{\alpha+1}} \end{cases}$$

Exercice2 $\boxed{\text{6pts}}$

$$\begin{cases} U_t + AU_x = F, \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ U(0,x) = U_0(x), \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

où $U(t,x) = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}$est une inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, A une matrice carrée constante et U_0 et F sont des fonctions régulières bornées.

1. $\boxed{\text{4pts}}$Soit A telle que le système soit strictement hyperbolique. Ce ci veut dire que A admet deux valeurs propres réelles distinctes$\lambda_1 < \lambda_2$ .A est alors diagonalisable ; $D = P^{-1}AP$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$et P matrice de passage formée des vecteurs propres .

   On multiplie l'edp de (3)par P^{-1},on obtient

   $$\frac{\partial}{\partial t}\left(P^{-1}U\right) + \underbrace{P^{-1}AP}_{=D}\frac{\partial}{\partial x}\left(P^{-1}U\right) = P^{-1}F$$

   Ainsi la fonction $(t,x) \to W(t,x) = P^{-1}U(t,x)$ vérifie un système d'edps découplées vu que D est diagonale. Et la condition initiale $W(0,x) = P^{-1}U(0,x) = P^{-1}U_0(x)$.

   En posant $F(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ f_2(t,x) \end{pmatrix}$, $W(t,x) = \begin{pmatrix} w_1(t,x) \\ w_2(t,x) \end{pmatrix}$, ; $P^{-1} = (a_{ij})_{i,j=1,2}$ et $U_0\,(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ le problème s'écrit

   $$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}w_i + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x}w_i = h_i(t,x) \\ w_i\,(0,x) = k_i(x) \end{cases} ; i = 1,2 \tag{4}$$

   avec

   $$\begin{cases} h_i(t,x) := a_{i1}f_1(t,x) + a_{i2}f_2(t,x) \\ k_i(x) := a_{i1}g_1(x) + a_{i2}g_2(x) \end{cases} ; i = 1,2$$

   (4) est une équation de transport.

   Résolution par la méthode des caractéristiques

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t)=\lambda_i \\ x(0)=x_0 \end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{c} \frac{dw_i}{dt}=h_i(t,x_0+\lambda_i t) \\ w_i(0,x_0)=k_i(x_0) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x(t)=x_0+\lambda_i t \text{ et } w_i(t,x(t))=k_i(x_0)+\int_0^t h_i(s,x_0+\lambda_i s)ds$$

Il s'agit maintenant de remonter les caractéristiques, c'est-à-dire pour tout (t,x), on cherche x_0 vérifiant $x=x_0+\lambda_i t$, ce qui donne bien sûr $x_0 = x-\lambda_i t$. Ainsi, on a

$$w_i(t,x)=k_i(x-\lambda_i t)+\int_0^t h_i(s,x+\lambda_i(s-t))ds \tag{5}$$

2. $\boxed{\text{2pts}}$On rappelle que toutes les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes, l'idée est donc de choisir la norme la plus adaptée pour obtenir le résultat. On choisit donc la norme $U \to \left\|P^{-1}U\right\|_2$ où $\|.\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
D'après la formule précédente, on a pour tout $t\in\mathbb{R}^+$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\|U\|=\left\|P^{-1}U\right\|_2=\|W\|_2$$

Alors de (5) ,pour pouvoir donner une majoration de $\|U\|$on doit avoir

$$\int_0^t |h_i(s,x+\lambda_i(s-t))|\,ds<+\infty, \quad \forall x,t$$

Puisque F est régulière on peut préciser cette régularité pour obtenir la majoration voulue par exemple en supposant que Fest à support compact, alors on peut donc déterminer $C>0$ (C dépend du support de F)telque

$$\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+}\|U(x,t)\|\leq C\left(\|U_0\|_\infty+\|F\|_\infty\right)$$

Remarque:
On peut utiliser la forme matricielle pour opérer la majoration :En fait, on a

$$h_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}F \text{ et } h_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}F$$

et

$$k_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}U_0 \text{ et } k_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}U_0$$

(5) permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\|U(x,t)\| &\leq \left\|P^{-1}U_0\left(x-\lambda_1 t\right)\right\|_2 + \left\|P^{-1}U_0\left(x-\lambda_2 t\right)\right\|_2 + \\
&+ \left\|\int_0^t P^{-1}F\left(s, x+\lambda_1\left(s-t\right)\right)ds\right\|_2 + \left\|\int_0^t P^{-1}F\left(s, x+\lambda_2\left(s-t\right)\right)ds\right\|_2 \\
&\leq 2\sup_x \left\|U_0\left(.\right)\right\| + 2T\sup_{x,t}\left\|F\left(.\right)\right\|
\end{aligned}$$

où $T > 0$ telque $suppF \subset [0,T] \times [\alpha, \beta]$