Université de Tlemcen A.U.2021/2022
Département de Mathématiques

Controle continu
de
Equations d'évolution

Questions de Cours

Soit $(E, \|\|_E)$ *est un espace de Banach.*
Les affirmations suivantes sont elles vraies , justifiez votre réponse.

1. Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe sur E, généré par A, alors il existe une norme équivalente $\|\|_1$sur E et $\omega \geq 0$ tels que $A + \omega I$ engendre un semi-groupe de contractions sur $(E, \|\|_1)$
2. *Si* $A : D(A) \underset{dense}{\subset} E \to E$ *est un opérateur linéaire m-accrétif et* $u_0 \in D(A)$. *Alors il existe* $u : \mathbb{R}^+ \to E$ *tel que*

$$\begin{cases} u \in C^1([0, +\infty[\,, E), \\ u(t) \in D(A), \forall t \geq 0, \\ u\prime(t) + A(u(t)) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{*+}, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Exercice1

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $q : \Omega \to \mathbb{R}$, continue telle que $\sup_{x\in\Omega} q(x) < \infty$. On définit sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$, l'opérateur$T(t)$,par

$$T(t)\,u = e^{tq}u,$$

pour tout $t \geq 0$ et $u \in \mathcal{C}_c(\Omega)$.

1. Vérifier que $(T(t))_{t\geq 0}$est un C^0 semi groupe.
2. Déterminer son générateur infinitésimal.

Exercice2

Pour T et L deux constantes réelles, $T > 0$ et $L > 0$, on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t)\,, t \in \,]0, T[\,, x \in \,]0, L[\\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \tag{1}$$

1. Ecrire (1) sous la forme du problème de Cauchy abstrait $\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), \\ y(0) = g(x) \end{cases}$ dans le Banach X.
2. Préciser X pour que A génère un C^0 semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.
3. Donner l'expression de la solution .

Université de Tlemcen A.U.2021/2022
Département de Mathématiques

Corrigé du ontrole continu
de
Equations d'évolution

Questions de Cours(6points)

Soit $(E, \|\|_E)$ *est un espace de Banach.*

L' affirmation 1 est vraie ,par la proposition 2.11 du chapitre1.
L' affirmation 2 est vraie ,par application de la définition de m-accretif et du corollaire 2.13 du th. de hille Yosida du chapitre1 .

Exercice1(7points)

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $q : \Omega \to \mathbb{R}$, continue telle que $\sup\limits_{x\in\Omega} q(x) < \infty$. On définit sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$, l'opérateur$T(t)$,par

$$T(t)\,u = e^{tq}u,$$

pour tout $t \geq 0$ et $u \in \mathcal{C}_c(\Omega)$.
$q : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que $x \to q(x) = e^{tq(x)}$pour $x \in \Omega, t \geq 0$.

1. $(4pts)$ $(T(t))_{t\geq 0}$est un C^0 semi groupe.
   $\forall u \in \mathcal{C}_c(\Omega)$,
   i) $T(0)\,u \overset{def.}{=} u$
   ii)$T(t+s)\,u = e^{(t+s)q}u = e^{tq}\,(e^{tq}u) = T(t)\,(T(s)\,u) = [T(t)\,oT(s)]\,u$
   iii)$\underset{t\to 0}{lim}\,\|T(t)\,u - u\| = \underset{t\to 0}{lim}\,\|(e^{tq} - id)\,u\| = \underset{t\to 0}{lim}\left(\sup\limits_{x\in\Omega}\left|\left(e^{tq(x)} - 1\right)u(x)\right|\right)$
   $= \underset{t\to 0}{lim}\left(\sup\limits_{x\in Suppu=K}\left|\left(e^{tq(x)} - 1\right)u(x)\right|\right)$
   $\leq \underset{t\to 0}{lim}\left|\left(\exp\left(\sup\limits_{x\in K} tq(x)\right) - 1\right)\right|\|u\| = 0$
2. $(3pts)$Son générateur infinitésimal $Au = -\frac{d}{dt}(T(t)u)_{|t=0^+} = q.u$

Exercice2$(7pts)$

Pour T et L deux constantes réelles, $T > 0$ et $L > 0$, on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = f(t)\,, t \in]0,T[\,, x \in]0,L[\\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

1. $\boxed{\text{4pts}}$(1) sous la forme du problème de Cauchy abstrait $\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), \\ y(0) = g \end{cases}$ dans le Banach X.

En considérant $g \in L^2(]0,L[)$ et $X = L^2\left(]0,T[\,, H_0^1(]0,L[)\right)$ alors $y \in X$, on a

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{dy}{dt} \in L^2\left(]0,T[\,, H^{-1}(]0,L[)\right) \\ \frac{dy}{dt} = Ay + f \\ y(0) = g \end{array} \right.$$

$A \in \mathcal{L}\left(H_0^1(]0,L[)\,, H^{-1}(]0,L[)\right)$ est défini par

$$\langle Ay, z \rangle = \int\limits_0^L y_x z_x dx$$

A est un opérateur non borné de$L^2(]0,L[)$,en prenant

$$D(A) = H^2(]0,L[) \cap H_0^1(]0,L[)$$

$$\begin{aligned} \langle Ay, z \rangle &= \int\limits_0^L y_x z_x dx = \int\limits_0^L y_{xx} z dx \\ \text{donc, } Ay &= y_{xx} \end{aligned}$$

2. En considérant

$$X = L^2\left(]0,T[\,, H_0^1(]0,L[)\right) \cap C\left(]0,T[\,, L^2(]0,L[)\right)$$

A génère un C^0 semi groupe $(T(t))_{t \geq 0}$

$\boxed{+1\text{pt}}$Req :$(T(t))_{t\geq 0}$ peut être exprimé par les fonctions propres de A(base hilbertienne):$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{k}{L}\pi x)$ et $T(t)\,u := \sum\limits_{k \geq 1} \langle u, \varphi_k \rangle e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \varphi_k$

3. $\boxed{3\text{pts}}$Si $f \in L^1(]0;T[;X)$ alors

$$u(t) = T(t)g + \int\limits_0^t T(t-s)f(s)ds$$

est l'unique solution intégrale de (1). Elle dépend de façon continue de g et f.