Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Module: Théorie des Semigroupes

Examen final,(Barème) Janvier 2022, Durée 1h30.

Exercice 1:07 pts Soit $T(t)$ un C^0 semigroupe sur un espace de Banach X.
a) Montrer qu'il existe $M \geq 1$, telle que

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \forall t \in [0,1]$$

Sol: $T(t)$ est continue sur un compact $[0,1]$, donc il est borné. Le th. de Banach Steihauss permet de conclure **02 pts** .
b) En déduire que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t > 0, \quad \omega = LogM.$$

Sol: **02 pts** On a pour $n \geq [t]\,1$

$$\|T(t)\| = \left\| T(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{t}{n}) \right\| \leq \left\| T^n(\frac{t}{n}) \right\| \leq M^n \leq M^{t+1} = Me^{\omega t}$$

c) Montrer que $\forall f \in X$, l'application

$$t \to T(t)f$$

est continue.
Sol:$t, h \geq 0$, et $f \in X$

$$\|T(t+h)f - T(t)f\| \leq \|T(h)T(f)f - T(t)f\| \leq \|T(t)T(h)f - T(t)f\| \leq \|T(t)\| \, \|T(h)f - f\| \leq Me^{\omega t} \, \|T(h)f -$$

qui tend vers zero quand h tend vers zero.Si $h < 0$, on raisonne d'une manière similaire.

Exercice 2. 08 poits Soit le problème

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u''(t), \quad t > 0, \; x \in R \\ u(0) = u_0 \in L^2(R) \end{cases}$$

a) Montrer que l'opérateur

$$Au = u'', \; D(A) = H^2(R)$$

engendre un semi groupe de contraction. En déduire que le système (1) admet une solution unique, et continue par rapport à u_0.

Sol: L'opérateur A est maximal monotone **04 pts**,, il engendre un C^0 semigroupe sur L^2, **1 pt.** La solution est donnée **1pt** par

$$u(t) = S(t)u_0.$$

Ceci **1pt** implique que

$$\left\|u^1 - u^2\right\|_{L^2} \leq \left\|u_0^1 - u_0^2\right\|_{L^2}$$

d'ou la continuité **1 pt**

Exercice 3. 06 pts Soit $f \in C\left[0,1\right]$. On définit l'opérateur

$$Af(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)ds$$

où K est une fonction continue sur $\left[0,1\right] \times \left[0,1\right]$.Montrer que

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = Af(t) \\ f(0) = f_0 \in C\left[0,1\right] \end{array} \right.$$

admet une solution unique.

Sol: L'opérateur A est borné, la solution existe et elle est donnée par

$$f(t) = e^{At}f_0$$