Université de Tlemcen, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques
Master 1 : Biomathématiques et Modélisation 30/01/2022

Examen final

Introduction aux modèles spatialisés en dynamiques des populations

Exercice 1. [07 Pts] Calculer Explicitement une solution du problème de Cauchy suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \ x \geq 0; \tag{0.2}$$

où $u_0 \geq 0$ est une fonction continue bornée et r une constante positive. Comment interpéter cett équation ?

Exercice 2. [08 Pts]
Considérons le problème de réaction-diffusion suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + ru(1 - u/K) \quad t \geq 0, \ x \in \Omega \tag{0.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad t \geq 0, \ x \in \partial\Omega \tag{0.4}$$

$$u(0,x) = u_0, \ x \in \Omega. \tag{0.5}$$

où r, K, $u_0 > 0$ sont des constantes. Calculer explicement la solution de ce problème.

Exercice 3. [05 Pts]
Considérons le modèle de réaction-diffusion suivant

$$u_t - u_{xx} = ru \quad 0 < x < l \quad t>0$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad \forall\, t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall\, x \in [0,l]$$

Ce modèle peut être utiliser pour modéliser la dynamique d'une population qui se diffuse dans une rivière de longeur l. Calculer la taille minimale de la rivière qui permet d'assurer la persistence de la population.

Exercice 01:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

Posons $v(t,x) = e^{-rt} u(t,x)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - ru\right) e^{-rt} = e^{-rt} \frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(e^{-rt} u\right) = \frac{\partial v}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & t > 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ v(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

C'est l'equation de la diffusion dont la solution est donnée par:

$$v(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy$$

$$\Rightarrow u(t,x) = \frac{e^{rt}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,dy.$$

Exercice 02:

~~Remarquons que~~

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + ru\left(1 - \dfrac{u}{K}\right) & t \geq 0 \quad x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & t \geq 0 \quad x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0 & x \in \Omega \end{cases}$$

1

1

Remarquons que la condition initiale u_0 est constante
Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = rU\left(1 - \dfrac{U}{K}\right) \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

La solution de cette équation est donnée par

$U(V) =$

Prenons $u(x, t) = V(t) =$
u vérifie le système (1)
Vue l'unicité de la solution.

$u(x, t) =$

<u>Exercice 03</u> Voir le cours.