Examen final

Exercice 1 (6pts)

Soient $f \in C^1$ et $\eta \in C^2$, deux fonctions convexes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soient a, b , dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\sigma = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. On définit $\phi(s) = \int_0^s f'(t)\eta'(t)dt$.

1- Montrer que

$$\sigma(\eta(b) - \eta(a)) \leq \phi(b) - \phi(a).$$

2- Supposons que η est strictement convexe et f est convexe et non affine sur (a, b)
Montrer alors qu'on a

$$\sigma(\eta(b) - \eta(a)) < \phi(b) - \phi(a).$$

Exercice 2 (4pts)

On considère l'équation de Burgers suivante,

$$\begin{cases} u_t + (e^u)_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

1- Calculer la solution entropique de (??) et montrer qu'elle est unique. Que peut-on conclure ?

Exercice 3 (10pts)

On considère l'équation de Burgers :

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

avec la condition initiale suivante,

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x < 2, \\ 2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Calculer les caractéristiques.

2- Calculer explicitement l'unique solution entropique de ce problème pour $t > 0$.

Correction de l'examen final

Exercice 1 (6pts) Cours

Soient $f \in C^1$ et $\eta \in C^2$, deux fonctions convexes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soient a, b , dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $\sigma = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. On définit $\phi(s) = \int_0^s f'(t)\eta'(t)dt$.

1- Montrer que

$$\sigma(\eta(b) - \eta(a)) \leq \phi(b) - \phi(a).$$

2- Supposons que η est strictement convexe et f est convexe et non affine sur (a, b)
 Montrer alors qu'on a

$$\sigma(\eta(b) - \eta(a)) < \phi(b) - \phi(a).$$

Correction voir le cours

Tout d'abord, on sait que si ϕ est une fonction convexe de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ alors ϕ est une fonction continue localement Lipschitzienne, et par conséquent elle est dérivable p.p. et sa dérivée est localement bornée (en fait on sait déjà que $\eta \in C^2$ donc la dernière conséquence est superflue !!) on sait qu'on a

$$\phi(\beta) - \phi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \phi'(s)ds$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Observons que pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ on a **(2pts)**

$$\phi(b) - \phi(a) - \sigma(\eta(b) - \eta(a)) = \int_a^b \eta'(t)(f'(t) - \sigma)dt = \int_a^b (\eta'(t) - \gamma)(f'(t) - \sigma)dt. \quad (1)$$

Puisque f est convexe, la fonction f' est croissante. Puisque σ est une valeur moyenne de f' sur (a, b) , il existe alors $c \in (a, b)$ tel que **(2pts)**

$$f'(t) \leq \sigma \quad \text{pour } t \in (a, c), \quad f'(t) \geq \sigma \quad \text{pour } t \in (c, b).$$

Maintenant on choisit $\gamma = \sup\{\eta'(s), s \leq c\}$ dans (1) (on a donc $\eta'(s) \leq \gamma$ si $s \leq c$ et $\eta'(s) \geq \gamma$ si $s \geq c$, car η' est une fonction croissante et $\gamma = \eta'(c)$ "fonction continue sur un compact atteint son sup!". Il vient alors que si $s \geq c$ alors $\eta'(s) \geq \eta'(c) = \gamma$ on obtient **(1pt)**

$$\phi(b) - \phi(a) - \sigma(\eta(b) - \eta(a)) = \int_a^c (\eta'(t) - \gamma)(f'(t) - \sigma)dt + \int_c^b (\eta'(t) - \gamma)(f'(t) - \sigma)dt \geq 0,$$

puisque $(\eta'(t) - \gamma)(f'(t) - \sigma) \geq 0$ pour $t \in (a, b)$. Le premier résultat est prouvé.

2- Concernant le second, remarquons que $\sigma(\eta(b) - \eta(a)) = \phi(b) - \phi(a)$ donne $(\eta'(t) - \gamma)(f'(t) - \sigma) = 0$ sur (a, b) (via la croissance de f' et η' ces deux fonctions ne peuvent pas avoir des supports disjoints). Puisque η est strictement convexe on a $\eta'(t) - \gamma \neq 0, t \in (a, b)$. Alors $f' = \sigma$ sur (a, b) , et ceci implique que f est affine sur (a, b) , une contradiction avec l'hypothèse. **(1pt)**

Exercice 2 (4pts)

On considère l'équation de Burgers suivante,

$$\begin{cases} u_t + (e^u)_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

1- Calculer la solution entropique de (2) et montrer qu'elle est unique. Que peut-on conclure ?

Correction

1- Via les caractéristiques on a (1pt)

$$x = et + x_0,$$

alors

$$x_0 = x - et.$$

Finalement la solution est donnée comme suit (1pt)

$$u(t, x) = 1. \quad (3)$$

A présent on va vérifier que (3) est bien solution de (2). En effet on a,

$$u_t = 0, \quad u_x = 0,$$

alors (1pt)

$$u_t + e^u u_x = 0.$$

Puisque la construction de cette solution est indépendante du problème (2), "la solution se construit via les caractéristiques qui sont indépendantes du problème (2)" alors la solution est unique. (1pt)

On remarque que la solution est classique.

Exercice 3 (10pts)

On considère l'équation de Burgers :

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4)$$

avec la condition initiale suivante,

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x < 2, \\ 2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Calculer les caractéristiques.

2- Calculer explicitement l'unique solution entropique de ce problème pour $t > 0$.

Correction :

1- Les caractéristiques sont données comme suit, **(1pt)**

$$X(t) = \begin{cases} 2t + x_0, & \text{si } x_0 < 0, \\ x_0, & \text{si } 0 < x_0 < 2, \\ 2t + x_0, & \text{si } x_0 > 2, \end{cases}$$

on a donc **(1pt)**

$$x_0 = \begin{cases} x - 2t, & \text{si } x < 2t, \\ x, & \text{si } 0 < x < 2, \\ x - 2t, & \text{si } x > 2 + 2t. \end{cases}$$

Calculons l'onde de choc entre la zone 1 et la zone 2, alors par un simple calcul on trouve $x(t) = t$. Ensuite calculons l'onde de détente entre la zone 2 et la zone 3, centrée en $x(0) = 2$ i.e. cherchons une solution de la forme $\phi(\frac{x-2}{t})$. On trouve alors pour $t \leq 2$, **(4pts)**

$$u(t, x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < t, \\ 0, & \text{si } t < x < 2, \\ \frac{x-2}{t}, & \text{si } 2 < x < 2t + 2, \\ 2, & \text{si } x > 2t + 2. \end{cases} \quad (5)$$

Maintenant cherchons la solution pour $t > 2$. Commençons par chercher la courbe de l'onde de choc entre 2 et $\frac{x-2}{t}$ passons par $x(2) = 2$. On a alors **(2pts)**

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{(f(\frac{x-2}{t}) - f(2))}{\frac{x-2}{t} - 2} \\ x(2) = 2, \end{cases}$$

comme $f(u) = \frac{u^2}{2}$, on a après simplification **(1pt)**

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x-2}{2t} + 1, \\ x(2) = 2, \end{cases}$$

en résolvant cette équation différentielle on trouve $x(t) = 2t - 2\sqrt{2t} + 2$. **(2pts)**

Finalement la solution pour $t > 2$ est donnée comme suit **(3pts)**

$$u(t, x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < 2t - 2\sqrt{2t} + 2, \\ \frac{x-2}{t}, & \text{si } 2t - 2\sqrt{2t} + 2 < x < 2t + 2, \\ 2, & \text{si } x > 2t + 2. \end{cases}$$