Université de Tlemcen
Département de Mathématiques,
Module :Théorie des Semigroupes
Contrôle Continu: Decembre 2021, durée 1h30.

Barème

Exercice1: *08.5 pts* Soit le problème

$$(1)\begin{cases} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \ t > 0, \ x \in R \right. \\ u\left(0, x\right) = v(x) \in L^2\left(R\right). \end{cases}$$

Montrer que l'opérateur

$$A : D(A) \to L^2\left(R\right)$$
$$D(A) = H^1\left(R\right), \quad A\varphi = \frac{d\varphi}{dx}$$

engendre un C^0 semigroupe de contraction . En déduire que (1) admet une solution unique.

Solution: i) A est monotone (02.5 pts) ii) Image$(A+I)$=L^2, (2.5pts) iii) $u(t) = S(t)v$ est une solution de (1)(03.5 pts).

Exercice 2. *06 pts* Soit l'espace de Banach $C_0\left(R\right)$, des fonctions continues à support compacte. Montrer que

$$S(t)\phi\left(\sigma\right) = \phi\left(t+\sigma\right), \ \ \forall \phi \in C_0\left(R\right), \forall t \geq 0$$

définit un C^0 semigroupe de contraction. Calculer son génerateur infinitésimal.

Solution: S est un semigroupe (coir le cours 04 pts).Calculons le génerateur (02pts)

$$A\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)\phi - \phi}{t}$$

ceci donne que

$$A\varphi\left(\sigma\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi\left(t+\sigma\right) - \phi\left(t\right)}{t} = \phi'\left(\sigma\right)$$
$$D(A) = H^1\left(R\right)$$

Exercice 3. *05 .5 pts* Soit A le generateur infinitésimal d'un C^0semigroupe $T(t)$. Montrer que $S(t) = e^{\lambda t}T(at)$, $a > 0$, est un C^0semigroupe .Calculer le génerateur de $S(t)$.

Solution: S est un semigroupe (facile, 2.5 pts).Calculons le génerateur (03pts)

$$\lim_{t\to 0}\frac{S(t)\phi-\phi}{t}=\lim_{t\to 0}ae^{\lambda t}\frac{[T(at)\phi-\phi]}{at}+\lim_{t\to 0}\frac{\left[e^{\lambda t}-1\right]}{t}\phi$$

Ceci donne que

$$B=aA+\lambda I$$

Remarque: certains points seront détaillés en présentiel.