Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

M2 Biomathematiques et Modélisation
Analyse numérique des EDP
Année 2021-2022

Contrôle continu

Exercice 1 (7pts)

On considère l'équation de Burgers suivante,

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}(u^2)_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction de classe C^1 strictement croissante.

1- Le problème (1) admet-il une solution classique globale? Justifier

2- Si oui, calculer cette solution pour $f(x) = \alpha x$ ou $\alpha > 0$ et montrer qu'elle est unique.

Exercice 2 (13pts)

On considère le problème de Riemann suivant

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

avec

$$u_0(x) = \begin{cases} -1, \quad \text{si } x < 0, \\ 1, \quad \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

On appelle solution faible de (2) une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ telle que

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left[u(t,x)\varphi_t(t,x) + \frac{1}{2}u^2(t,x)\varphi_x(t,x)\right] dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x) dx = 0, \tag{4}$$

pour quelle que soit $\varphi \in C_K^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ où $C_K^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues dérivables à support compact inclus dans $K \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

En utilisant la formule (4), montrer que la fonction

$$u_0(t,x) = \begin{cases} -1, \quad \text{si } x < -\dfrac{t}{2}, \\ 0, \quad \text{si } -\dfrac{t}{2} \leq x < \dfrac{t}{2}, \\ 1, \quad \text{si } x > \dfrac{t}{2}, \end{cases} \tag{5}$$

est une solution faible de (2)-(3).

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

M2 Biomathematiques et Modélisation
Analyse numérique des EDP
Année 2021-2022

Correction du contrôle continu

Exercice 1 (7pts)

On considère l'équation de Burgers suivante,

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}(u^2)_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction de classe C^1 strictement croissante.

1- Le problème (1) admet-il une solution classique globale? Justifier

2- Si oui, calculer cette solution pour $f(x) = \alpha x$ ou $\alpha > 0$ et montrer qu'elle est unique.

Correction

1- Calculons $a(u_0) = u_0(x) = f(x)$. A présent $a(u_0)'(x) = f'(x) > 0$. Selon le cours le problème (1) admet une solution globale.

2- Via les caractéristiques on a

$$X(t) = \alpha x_0 t + x_0,$$

alors

$$x_0 = \frac{X}{1+\alpha t}.$$

Finalement la solution est donnée comme suit

$$u(t,x) = u(0,x_0) = u_0\left(\frac{x}{1+\alpha t}\right) = \frac{\alpha x}{1+\alpha t}. \tag{2}$$

A présent on va vérifier que (2) est bien solution de (1). En effet on a,

$$u_t = \frac{-\alpha^2 x}{(1+\alpha t)^2}, \quad u_x = \frac{\alpha}{1+\alpha t},$$

alors

$$u_t + u u_x = \frac{-\alpha^2 x}{(1+\alpha t)^2} + \frac{\alpha^2 x}{(1+\alpha t)^2} = 0.$$

Puisque la construction de cette solution est indépendante du problème (1), "la solution se construit via les caractéristiques qui sont indépendantes du problème (1)" alors la solution est unique.

Exercice 2 (13pts)

On considère le problème de Riemann suivant

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

avec

$$u_0(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } \; x < 0, \\ 1, & \text{si } \; x \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

On appelle solution faible de (3) une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ telle que

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \big[u(t,x)\varphi_t(t,x) + \frac{1}{2}u^2(t,x)\varphi_x(t,x)\big] dxdt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)dx = 0, \tag{5}$$

pour quelle que soit $\varphi \in C^1_K(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ où $C^1_K(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues dérivables à support compact inclus dans $K \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

En utilisant la formule (5), montrer que la fonction

$$u_0(t,x) = \begin{cases} -1, & \text{si } \; x < -\dfrac{t}{2}, \\ 0, & \text{si } \; -\dfrac{t}{2} \leq x < \dfrac{t}{2}, \\ 1, & \text{si } \; x > \dfrac{t}{2}, \end{cases} \tag{6}$$

est une solution faible de (3)-(4).

Correction de l'exercice 2

Posons

$$A = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u_0(t,x)\varphi_t(t,x)dxdt$$

et

$$B = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u_0^2(t,x)\varphi_x(t,x)dxdt.$$

Montrons que

$$A + B = -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)dx.$$

En effet

$$A \;=\; (-1)\int_0^\infty \int_{-\infty}^{-\frac{t}{2}} \varphi_t(t,x)dxdt + \int_0^{+\infty}\int_{\frac{t}{2}}^{+\infty} \varphi_t(t,x)dxdt.$$

En utilisant Fubini, on trouve

$$\begin{aligned} A &= (-1)\int_{-\infty}^0 \int_0^{-2x} \varphi_t(t,x)dtdx + \int_0^{+\infty}\int_0^{2x} \varphi_t(t,x)dtdx, \\ &= (-1)\int_{-\infty}^0 \Big(\varphi(-2x,x) - \varphi(0,x)\Big)dx + \int_0^{+\infty} \Big(\varphi(2x,x) - \varphi(0,x)\Big)dx. \end{aligned}$$

Après réarrangement des termes on trouve

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(-2x,x)dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(2x,x)dx \\ &+ \int_{-\infty}^{0} \varphi(0,x)dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi(0,x)dx. \end{aligned}$$

Passons a présent au calcul du B.

$$B = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{-\frac{t}{2}} \varphi_x(t,x)dxdt + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\int_{\frac{t}{2}}^{+\infty} \varphi_x(t,x)dxdt.$$

En calculant ces intégrales on a

$$B = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \varphi(t,\frac{-t}{2})dt - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \varphi(t,\frac{t}{2})dt.$$

Après simplification,

$$B = \frac{-1}{2}\int_{0}^{+\infty} \varphi(t,\frac{-t}{2})dt + \frac{-1}{2}\int_{0}^{+\infty} \varphi(t,\frac{t}{2})dt.$$

Faisons un changement de variable $x = \dfrac{-t}{2}$ pour la première intégrale et $x = \dfrac{t}{2}$ pour la deuxième intégrale on trouve

$$B = \int_{0}^{+\infty} \varphi(-2x,x)dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi(2x,x)dx.$$

Sommons $A + B$ on obtient

$$\begin{aligned} A + B &= \int_{-\infty}^{0} \varphi(0,x)dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi(0,x)dx, \\ &= -\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)dx. \end{aligned}$$

Ainsi la formule (5) est bien vérifiée. Donc (6) est une solution faible de (3)-(4).