

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire : 2021-2022.

Master I : Probabilités-Statistiques
Module : Analyse Fonctionnelle II
Durée : 1h30

Epreuve Finale

Exercice-01 : (05 points)

Soit H un espace préhilbertien réel et $T : H \rightarrow H$ une isométrie $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in H$, telle que $T(0) = 0$.

1. Montrer que T conserve le produit scalaire :

$$(T(x)|T(y)) = (x|y) \quad \text{pour tous } x, y \in H.$$

2. En déduire que T est linéaire (**Indication** : développer $\|T(x + y) - T(y) - T(x)\|$).

Exercice-02 : (08 points)

1. Montrer qu'il existe une constante C (dépendant de p) telle que

$$\left| |a + b|^p - |a|^p - |b|^p \right| \leq C(|a|^{p-1}|b| + |a||b|^{p-1}) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ tel que $f_n \rightarrow f$ p.p sur Ω . Montrer que $f \in L^p(\Omega)$ et que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left\{ |f_n|^p - |f_n - f|^p \right\} = \int_{\Omega} |f|^p.$$

Indication : on pose : $a = f_n - f$ et $b = f$, on note que $|f_n - f| \rightarrow 0$ faiblement dans $L^p(\Omega)$ et $|f_n - f|^{p-1} \rightarrow 0$ faiblement dans $L^{p'}(\Omega)$.

3. Déduire que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega)$:

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$ presque partout dans Ω .
- $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.

Alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Exercice-03 : (07 points)

On pose, pour tout $f \in L^2([0, 1])$ (on supposera les fonctions à valeurs réelles) et $x \in [0, 1]$:

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Justifier l'existence de $(Tf)(x)$ et montrer que T définit une application linéaire continue

$$T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]).$$

2. Calculer l'adjoint T^* de T (On remarquera que $\mathbb{1}_{[0,x]}(t) = \mathbb{1}_{[t,1]}(x)$).

Bonne chance.

Correction du contrôle continu

Exercice-01 : (05 points)

1. Notons d'abord que, puisque $T(0) = 0$, on a $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$. Ensuite, comme $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$, on a $(x|y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$. On obtient :

$$(T(x)|T(y)) = \frac{1}{2}(\|T(x) + T(y)\|^2 - \|T(x)\|^2 - \|T(y)\|^2) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = (x|y). \quad (01,5 \text{ points})$$

2. Pour montrer que T est linéaire :

On calcule

$$\begin{aligned} \|T(x + y) - T(x) - T(y)\|^2 &= \|T(x + y)\|^2 + \|T(x)\|^2 + \|T(y)\|^2 - 2(T(x)|T(y)) \\ &\quad + 2(T(y)|T(x)) - 2(T(x) + T(y)|T(y)) + 2(T(x)|T(y)) \\ &= \|x + y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x + y|x) - 2(x + y|y) + 2(x|y) \\ &= \|(x + y) - x - y\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Donc $T(x + y) = T(x) + T(y)$(1,5 points)

- Il suffit maintenant de calculer $\|T(\lambda x) - \lambda T(x)\|^2$, on obtient que $T(\lambda x) = \lambda T(x)$. Alors T est linéaire, on peut aussi dire que T est clairement continue... (02 points).

Exercice-02 : (08 points)

1. Il suffit de vérifier que

$$\frac{|a + b|^p - |a|^p - |b|^p}{(|a|^{p-1}|b| + |a||b|^{p-1})} \leq C \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

On pose $a \leq b$ et $w = \frac{a}{b} \leq 1$, alors, il suffit de vérifier que

$$\sup_{w \in [-1, 1]} \frac{|w + 1|^p - |w|^p - 1}{(|w|^{p-1} + |w|)} \leq C \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (03 \text{ points})$$

2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega)$ tel que :

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$ presque partout dans Ω .
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est borné dans $L^p(\Omega)$.

Montrer que $f \in L^p(\Omega)$ et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left\{ |f_n|^p - |f_n - f|^p \right\} = \int |f|^p.$$

Indication : on pose : $a = f_n - f$ et $b = f$, et on considère la suite $\varphi_n = \left| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \right|$.

D'après le théorème de Fatou on aura

$$\int |f|^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int |f_n|^p \leq C.$$

Donc $f \in L^p$.

En utilisant, la première question avec $a = f_n - f$ et $b = f$ et choisissons $\varphi_n = \left| |f_n| - |f_n - f| - |f| \right|$, on obtiendra $\varphi_n \leq |f_n - f|^{p-1}|f| + |f_n - f||f|^{p-1} \in L^1(\Omega)$.

Et Aussi

$$|f_n - f|^{p-1}|f| + |f_n - f||f|^{p-1} \rightarrow 0.$$

On a φ_n converge presque partout vers 0, avec $|\varphi_n| \leq g_n \rightarrow g$ dans $L^1(\Omega)$ alors, d'après le Théoreme de Lebesgue Dominée

$$\varphi_n \rightarrow 0$$

et par suite

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \text{ et } \|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p \dots\dots (03 \text{ points})$$

Ce qu'il faut démontrer.

3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega)$ et soit f une fonction dans $L^p(\Omega)$ tel que :
- $f_n(x) \rightarrow f(x)$ presque partout dans Ω .
 - $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.
- Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

D'après ce qui précède

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p - \|f\|_p$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0 \quad \dots\dots (02 \text{ points})$

Exercice-03 : (07 points)

On pose, pour tout $f \in L^2([0, 1])$ (on supposera les fonctions à valeurs réelles) et $x \in [0, 1]$:

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. $(Tf)(x)$ existe pour tout $x \in [0, 1]$, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\mathbb{1}_{[0,x]}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \|f\|_2 < \infty. (01 \text{ point})$$

De plus, $Tf \in L^2([0, 1])$ car, d'une part Tf est continue, donc mesurable, car, comme ci-dessus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|Tf(x) - Tf(x')| \leq \sqrt{|x - x'|} \|f\|_2.$$

Et d'autre part

$$\int_0^1 |(Tf)(x)|^2 dx = \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| dt \right)^2 dx \leq \|f\|_2^2.$$

D'après le calcul précédent. Cela dit en plus que $\|Tf\|_2 \leq \|f\|_2 \dots (02 \text{ points})$

Comme l'application $T : f \in L^2([0, 1]) \rightarrow Tf \in L^2([0, 1])$. et montrer que T définit une application linéaire continue

$$T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1]).$$

est clairement linéaire, cette inégalité montre que T est continue... (01 points)

2. Par définition l'adjoint T^* de T est caractérisé par

$$(Tf|g) = (f|T^*g) \quad f, g \in L^2([0, 1]).$$

Or,

$$\begin{aligned} (Tf|g) &= \int_0^1 Tf(x)g(x) dx = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt \right) g(x) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(t) \mathbb{1}_{[0,x]}(t) dt \right) g(x) dx \\ &= \left(\int_0^1 g(x) \mathbb{1}_{[t,1]}(x) dx \right) f(t) dt \end{aligned}$$

Par le Théoreme de Fubini, que l'on peut car :

$$\left(\int_0^1 g(x) \mathbb{1}_{[t,1]}(x) dx \right) f(t) dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right) \left(\int_0^1 |g(x)| dx \right) \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Donc

$$(T^*g)(x) = \int_1^t g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx - \int_0^t g(x) dx.$$

Alors $T^*g = [(Tg)(1)]\mathbb{1} - Tg$... (03 points)