Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire : 2021-2022.

Master I : Probabilités-Statistiques
Module : Analyse Fonctionnelle II
Durée : 1h30

Contrôle Continu

Exercice-01 : **(07 points)**

1. Vérifier que
$$\Big||a+b|-|a|-|b|\Big| \leq 2|b| \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^1(\Omega)$ tel que :
— $f_n(x) \to f(x)$ presque partout dans Ω.
— $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $L^1(\Omega)$.
Montrer que $f \in L^1(\Omega)$ et que
$$\lim_{n\to\infty} \int \Big\{|f_n| - |f_n - f|\Big\} = \int |f|.$$
Indication : on pose : $a = f_n - f$ et $b = f$, et on considère la suite $\varphi_n = \Big||f_n| - |f_n - f| - |f|\Big|$.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^1(\Omega)$ et soit f une fonction dans $L^1(\Omega)$ tel que :
— $f_n(x) \to f(x)$ presque partout dans Ω.
— $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$.
Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Exercice-02 : **(06 points)**
Soit $1 \leq q \leq p \leq \infty$. On considère a une fonction mesurable sur Ω. Supposons que $au \in L^q(\Omega)$ pour tout $u \in L^p(\Omega)$.
Démontrer que $a \in L^r(\Omega)$ avec :
$$r = \begin{cases} \dfrac{pq}{p-q} & \text{si} \quad p < \infty. \\ q & \text{si} \quad p = \infty \end{cases}$$
Indication : Utiliser le théorème du graphe fermé.

Exercice-03 : **(07 points)** Soient $f, g \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, démontrer que :
$$\max(a;b) = \frac{(a+b)+|b-a|}{2}, \ \min(a;b) = \frac{(a+b)-|b-a|}{2}.$$
2. Montrer que
$$h(x) = \max\Big\{f(x); g(x)\Big\} \in L^p(\Omega).$$
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ tel que $f_n \to f$ et $g_n \to g$ dans $L^p(\Omega)$. Posons $h_n(x) = \max\Big\{f_n(x); g_n(x)\Big\}$ et démontrer que $h_n \to h$ dans $L^p(\Omega)$.
4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$ et soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Supposons que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ et $g_n \to g$ presque partout.
Démontrer que
$$f_n g_n \to fg \qquad \text{dans } L^p(\Omega).$$

Bonne chance.

Correction du contrôle continu

Exercice-01 : **(07 points)**

1. Vérifier que
$$\Big||a+b|-|a|-|b|\Big| \leq 2|b| \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}. \qquad ......(02 \text{ points})$$
Il suffit de démontrer
$$-2|b| \leq |a+b|-|a|-|b| \leq 2|b|.$$
On a $|a+b| \geq ||a|-|b|| \geq |a|-|b| = |a|-2|b|+|b|$, donc $|a+b|-|a|-|b| \geq -2|b|$......(01 point).
De plus $|a+b| \leq |a|+|b| \leq |a|+|b|+2|b|$, alors $|a+b|-|a|-|b| \leq 2|b|$.......(01 point)
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^1(\Omega)$ tel que :
   — $f_n(x) \to f(x)$ presque partout dans Ω.
   — $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $L^1(\Omega)$.
   Montrer que $f \in L^1(\Omega)$ et que
$$\lim_{n\to\infty} \int \Big\{|f_n| - |f_n - f|\Big\} = \int |f|.$$
   Indication : on pose : $a = f_n - f$ et $b = f$, et on considère la suite $\varphi_n = \Big||f_n| - |f_n - f| - |f|\Big|$.
   D'apres le théoreme de Fatou on aura
$$\int |f| \leq \liminf_{n\to\infty} \int |f_n| \leq C.......(01 \text{ points})$$
   Donc $f \in L^1$.
   En utilisant, la première question avec $a = f_n - f$ et $b = f$ et choisissons $\varphi_n = \Big||f_n| - |f_n - f| - |f|\Big|$, on obtiendra $\varphi_n \leq 2|f|$.
   On a φ_n converge presque partout vers 0, alors, d'apres le Théoreme de Lebesgue Dominée
$$\varphi_n \to 0$$
   et par suite
$$\|f_n - f\|_1 \to 0 \text{ et } \|f_n\|_1 \to \|f\|_1.......(02 \text{ points})$$
   Ce qu'il faut démonter.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^1(\Omega)$ et soit f une fonction dans $L^1(\Omega)$ tel que :
   — $f_n(x) \to f(x)$ presque partout dans Ω.
   — $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$.
   Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$
   D'apres ce qui précede
$$\lim_{n\to\infty} |f_n - f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 - \|f\|_1$$
   Donc $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ ....(02 points)

Exercice-02 **(06 points)**

Soit $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Soit a est une fonction mesurable sur Ω. Supposons que $au \in L^q(\Omega)$ pour tout $u \in L^p(\Omega)$. Démontrer que $a \in L^r(\Omega)$ avec :
$$r = \begin{cases} \dfrac{pq}{p-q} & \text{si} \quad p < \infty. \\ q & \text{si} \quad p = \infty \end{cases}$$

Considérons l'opérateur $T : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ définie par $Tu = au$. On démontre que le graphe de T est fermé. En effet, soit $(u_n)_n$ est une suite dans $L^p(\Omega)$ telque

$$u_n \to u \quad \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et } Tu_n \to f \text{ dans } L^q(\Omega).$$

Donc a une sous suite

$$u_n \to u \qquad \text{p.p dans } \Omega.$$

Et

$$Tu_n \to f \qquad \text{p.p dans } \Omega.$$

Alors $f = Tu$. Par le théorème du graphe fermé que T est continue, alors il existe une constante positive C telque

$$\|Tu\|_q = \|au\|_q \leq C\|u\|_p \qquad \forall u \in L^p(\Omega)......(02 \text{ points})$$

Cas 01 : Si $p < \infty$ alors supposons $v = u^q$ alors

$$\int_\Omega a^q v\, dx \leq C^q \Big(\int_\Omega a^q v^{\frac{p}{q}}\Big)^{\frac{q}{p}} = C^q \|u\|_{\frac{q}{p}} \qquad \forall v \in L^{\frac{p}{q}}(\Omega).$$

Alors l'application $K : v \to Kv = \displaystyle\int_\Omega |a|^q v$ est continue et lineaire fonctionnelle de $L^{\frac{p}{q}}(\Omega)$ et ceci implique alors que $|a|^q \in L^{(\frac{p}{q})'}(\Omega)$, où $(\frac{p}{q})' = \frac{p}{p-q}$ alors $a \in L^r(\Omega)$ avec $r = \frac{qp}{p-q}$
....(02 points)

Cas 02 : Si $p = \infty$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$, prenons par exemple $u = 1$ alors

$$\|Tu\|_q = \|a\|_q \leq C \qquad \forall u \in L^\infty(\Omega).$$

Alors $a \in L^q(\Omega)$ ....(02 points)

<u>Exercice-03</u> : **(07 points)**

Soient $f, g \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, démontrer que :

$$\max(a;b) = \frac{(a+b) + |b-a|}{2},\ \min(a;b) = \frac{(a+b) - |b-a|}{2} ....\text{évident}......(02 \text{ points})$$

2. Montrer que

$$h(x) = \max\Big\{f(x); g(x)\Big\} = \frac{1}{2}\big((f(x)+g(x)) + |f(x)-g(x)|\big) \in L^p(\Omega)........(01 \text{ point})$$

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ tel que $f_n \to f$ et $g_n \to g$ dans $L^p(\Omega)$. Posons

$$h_n(x) = \max\Big\{f_n(x); g_n(x)\Big\} = \frac{1}{2}\big((f_n(x)+g_n(x)) + |f_n(x)-g_n(x)|\big)$$
$$\to \frac{1}{2}\big((f(x)+g(x)) + |f(x)-g(x)|\big) = h(x) = \max\Big\{f(x); g(x)\Big\} \text{ dans } L^p(\Omega).$$

Alors

$$\|h_n - h\|_p = \|\frac{1}{2}\Big((f_n(x)-f(x)) + (g_n(x)-g(x)) + (|f_n(x)-g_n(x)| - |f(x)-g(x)|)\Big)\|_p \to 0...(02 \text{ points})$$

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$ et soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Supposons que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ et $g_n \to g$ presque partout.
Démontrer que

$$\|f_n g_n - fg\|_p \to 0 \qquad ....(02 \text{ points}).$$