Université AbouBekr Belkaid-Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire 2021-2022

Master 1 : Probabilités-Statistiques
Module : Théorie de l'intégration
Durée : 1h30

Examen final : Théorie de l'intégration
20.01.2022

Exercice 1 (4 pts). *Soient* $(E, \mathscr{F}, \mu)$ *un espace mesure et* $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction* f. *Soit* $C > 0$ *et supposons que* $\int_E f_n d\mu \leq C$ *pour tout* $n \geq 0$. *Montrer que* $\int_E f d\mu \leq C$.

Exercice 2 (6 pts). *On considère la fonction* F *définie par*

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2tx) dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que F *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.
2. En utilisant une intégration par partie, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, F'(t) + 2tF(t) = 0.$$

Exercice 3 (4 pts). *Soit la fonction* f *définie sur* $E =]0, \pi[\times]0, +\infty[$ *par*

$$\begin{array}{rcl} f :]0, \pi[\times]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = xy \sin(x) e^{-xy^2}. \end{array}$$

1. Calculer $\int_E f(x, y) dxdy$.
2. Que peut-on conclure ?

Exercice 4 (6 pts). *Soit* $\mathscr{F}$ *une tribu sur* $\mathbb{R}$ *et soit* μ *une mesure de probabilité sur* $(\mathbb{R}, \mathscr{F})$. *Soient* f *et* g *deux fonctions* **mesurables et monotones de même sens**. *On suppose de plus que les fonctions* f, g *et* fg *sont dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{F}, \mu)$.
1. Montrer que les fonctions $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ *et* $(x, y) \mapsto f(x)g(x)$ *sont dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg d\mu \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f d\mu\right) \left(\int_{\mathbb{R}} g d\mu\right).$$

Indication : On pourra considérer la fonction $F(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.

Université AbouBekr Belkaid-Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire 2021-2022

Master 1 : Probabilités-Statistiques
Module : Théorie de l'intégration

Corrigé de l'examen final

Exercice 5 (4 pts). *Soient $(E, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesure et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction f. Soit $C > 0$ et supposons que $\int_E f_n d\mu \leq C$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $\int_E f d\mu \leq C$.*

Solution

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives. D'après le lemme de Fatou on a

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu \ldots (*) \qquad 1\,pt$$

et comme $\int_E f_n d\mu \leq C$ pour tout $n \geq 0$, on a alors

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu < C. \qquad 1\,pt$$

Donc d'après $(*)$ on obtient

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq C. \qquad 0.5\,pt$$

D'autre part, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f, donc

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} f_n = f. \qquad 1\,pt$$

Ainsi

$$\int_E f d\mu < C. \qquad 0.5\,pt$$

Exercice 6 (6 pts). *On considère la fonction F définie par*

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2tx) dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. *Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
2. *En utilisant une intégration par partie, montrer que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, F'(t) + 2tF(t) = 0.$$

Solution

1. Posons $f(t,x) = e^{-x^2}\cos(2tx)$, pour $(t,x) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$

• Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. On a

$$\forall x \geq 0, \quad |f(t,x)| = |e^{-x^2}\cos(2tx)| \leq e^{-x^2}. \qquad 0.5\,pt$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} < +\infty. \qquad 0.5\,pt$$

Donc (critère de comparaison), l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2tx)dx$ est absolument convergente. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}\cos(2tx)$ (qui est mesurable comme produit de fonctions mesurables) est donc intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,+\infty[$ et les deux intégrales coïncident. $0.5\,pt$

• La fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -2xe^{-x^2}\sin(2tx), \qquad 0.5\,pt$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

• On a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq 2xe^{-x^2}. \qquad 0.5\,pt$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}dx = 1, \qquad 0.5\,pt$$

la fonction $x \mapsto 2xe^{-x^2}$ est donc intégrable sur $[0,+\infty[$, et en vertu du théorème de dérivabilité des fonctions définies par des intégrales, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$. $1\,pt$

2. On a

$$F'(t) = \int_0^{+\infty}(-2xe^{-x^2}\sin(2tx))dx.$$

En utilisant une intégration par parties, posons

$$\begin{aligned} u = \sin(2tx) \quad &\Rightarrow \quad du = 2t\cos(2tx)dx \\ dv = -2xe^{-x^2}dx \quad &\Rightarrow \quad v = e^{-x^2} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} F'(t) = \int_0^{+\infty}(-2xe^{-x^2}\sin(2tx))dx &= \left[e^{-x^2}\sin(2tx)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2t\cos(2tx)e^{-x^2}dx \\ &= -2t\int_0^{+\infty}\cos(2tx)e^{-x^2}dx \\ &= -2tF(t). \qquad 2\,pt \end{aligned}$$

Exercice 7 (4 pts). *Soit la fonction f définie sur $E =]0,\pi[\times]0,+\infty[$ par*

$$\begin{array}{rcl} f :]0,\pi[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = xy\sin(x)e^{-xy^2}. \end{array}$$

1. Calculer $\int_E f(x,y)dxdy$.
2. Que peut-on conclure ?

Solution
1. La fonction f est mesurable sur $E =]0,\pi[\times]0,+\infty[$ car elle est continue. Remarquons que $\sin x > 0$ sur $]0,\pi[$, ainsi la fonction f est positive sur $E =]0,\pi[\times]0,+\infty[$, donc le théorème de Fubini-Tonelli s'applique et on a $1\,pt$

$$\begin{aligned} \int_E xy\sin(x)e^{-xy^2}dxdy &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{+\infty} xy\sin(x)e^{-xy^2}dy\right)dx \\ &= \int_0^{\pi}\left[-\frac{\sin(x)}{2}e^{-xy^2}\right]_0^{+\infty}dx \\ &= \int_0^{\pi}\frac{\sin(x)}{2}dx \\ &= \left[-\frac{\cos(x)}{2}\right]_0^{\pi} = 1. \qquad 2\,pt \end{aligned}$$

2. Puisque

$$\int_E xy\sin(x)e^{-xy^2}dxdy = 1 < +\infty$$

on conclu que f est intégrable sur E. $1\,pt$

Exercice 8 (6 pts). *Soit $\mathscr{F}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R},\mathscr{F})$. Soient f et g deux fonctions* **mesurables et monotones de même sens**. *On suppose de plus que les fonctions f, g et fg sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathscr{F},\mu)$.*
1. Montrer que les fonctions $(x,y)\mapsto f(x)g(y)$ et $(x,y)\mapsto f(x)g(x)$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.
2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fgd\mu \geq \left(\int_{\mathbb{R}} fd\mu\right)\left(\int_{\mathbb{R}} gd\mu\right).$$

Indication : On pourra considérer la fonction $F(x,y) = (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$.

Solution
1. En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli sur les fonctions $(x,y)\mapsto|f(x)g(y)|$ et

$(x, y) \mapsto |f(x)g(x)|$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x)g(y)| d(\mu \otimes \mu)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)||g(y)| d\mu(x) \right) d\mu(y) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)| d\mu(y) \right) < +\infty. \qquad \color{red}{1\,pt}
\end{aligned}$$

car f et g sont intégrables, et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x)g(x)| d(\mu \otimes \mu)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)||g(x)| d\mu(x) \right) d\mu(y) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| d\mu(x) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} 1 d\mu(y) \right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| d\mu(x) \right) \underbrace{\mu(\mathbb{R})}_{=1} < +\infty. \qquad \color{red}{1\,pt}
\end{aligned}$$

car fg est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Ainsi les fonctions $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ et $(x, y) \mapsto f(x)g(x)$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

2. Considérons la fonction $F(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$. Cette fonction est mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Montrons qu'elle est positive : Supposons que f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$, alors pour $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leq y$ on a $f(x) - f(y) \leq 0$ et $g(x) - g(y) \leq 0$ donc $F(x, y) \geq 0$, de même si $x \geq y$ on a $f(x) - f(y) \geq 0$ et $g(x) - g(y) \geq 0$ donc $F(x, y) \geq 0$. Par analogie si f et g sont décroissantes alors on a aussi $F(x, y) \geq 0$. $\color{red}{0.5\,pt}$ Ainsi on a

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x, y) d(\mu \otimes \mu)(x, y) \geq 0. \qquad \color{red}{0.5\,pt}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x, y) d(\mu \otimes \mu)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} [f(x)g(x) - f(x)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(y)] \, d(\mu \otimes \mu)(x, y).
\end{aligned}$$

D'après la question 1) on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x, y) d(\mu \otimes \mu)(x, y) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(x) d(\mu \otimes \mu)(x, y) - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(y) d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(y)g(x) d(\mu \otimes \mu)(x, y) + \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(y)g(y) d(\mu \otimes \mu)(x, y).
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini sur les fonctions intégrables $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ et $(x, y) \mapsto f(x)g(x)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x,y)d(\mu\otimes\mu)(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu(x)\right) d\mu(y) - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(y)d\mu(x)\right) d\mu(y) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x)d\mu(x)\right) d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(y)d\mu(x)\right) d\mu(y) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu(x)\right) \mu(\mathbb{R}) - \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)d\mu(y)\right) \\
&\quad - \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)d\mu(y)\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)d\mu(x)\right) + \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)g(y)d\mu(y)\right) \mu(\mathbb{R}) \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu(x) - 2\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)d\mu(y)\right) \geq 0,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat. $3\,pt$