Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire : 2021-2022.

Master I : Probabilités-Statistiques
Module : Analyse Fonctionnelle I
Durée : 1h30

Examen Final

Exercice-01 : **(06 points)**

Soit $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ associe la norme $\|.\|_E$ pour que $(E, \|.\|)$ soit complet et

$$\|f_n - f\| \to 0 \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f.$$

Soit $\|.\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E.

Pour $t \in [0,1]$ et $f \in E$. On pose :

$$L_t(f) = f(t)$$

1. Montrer que L_t est une forme linéaire continue sur E.
2. En utilisant le Théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ tel que :
$$\|f\|_\infty \leq C\|f\| \qquad \forall f \in E.$$
3. Montrer que les normes $\|\|$ et $\|\|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice-02 : **(08 points)**

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et pour $f \in E$, on définit

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

1. — Montrer que, pour $n \geq 1$, on a
$$T^n f(x) = \int_0^x K_n(x,t) f(t)\,dt \qquad \text{où } K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$
   — En déduire la valeur de la norme $\|T^n\|, n \geq 1$.
2. Calculer la somme $\sum_{n\geq 1} T^n$.
3. Résoudre l'equation $(I - T)f = g$ où $g \in E$.

Exercice-03 : **(06 points)**

Soit $\alpha \in [0,1]$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux distincts de $[0,1]$ qui converge vers le point α. On note $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_E = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ pour $f \in E$, on pose

$$Lf(x) = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n f(x_n).$$

1. Montrer que L est une forme linéaire continue sur E.
2. Montrer que $\|L\|_{E'} = 2$.
3. Soit $f \in E$ tel que $\|f\|_E \leq 1$. En utilisant la continuité de f en α, montrer que $|L(f)| < 2$.

Bonne chance.

Correction de l'examen

Exercice-01 : **(06 points)**

1. L_t linéaire-évident.
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E qui converge vers f, ceci implique que
   $$\|f_n - f\| \to 0$$
   Alors
   $$(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \to f(t) \qquad \text{par hypothèse, donc}$$
   $L_t(f_n)$ converge vers $L_t(f)$, d'où la continuité de L_t.
2. Pour f fixé l'ensemble $\{L_t f, t \in [0,1]\} = f([0,1])$ est un borné de $\mathbb{R}$. Comme E est complet par rapport à la norme $\|\|$, d'après le théorème de Banach-Steinhaus.
   $$\exists C > 0 \text{tel que} \|L_t\|_{E'} \leq C \qquad \forall t \in [0,1]$$
   D'où
   $$\forall t \in [0,1], |f(t)| = |L_t(f)| \leq C\|f\| \Longrightarrow \|f\|_\infty \leq C.$$
3. Soit l'application identité de $(E, \|.\|)$ vers $(E, \|.\|_\infty)$ est une bijection continue, comme $(E, \|.\|)$, $(E, \|.\|_\infty)$ sont complet, d'après le Théoreme d'application ouverte : I_d est une homeomorphisme, alors
   $$\exists C > 0 \text{ tel que} \|f\| \leq C\|f\|_\infty.$$
   Alors les deux normes sont équivalente.

Exercice 3 :

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $||.||_\infty$ et pour que $f \in E$, on définit :
$$Tf(x) := \int_0^x f(t)\, dt.$$

1. Montrer que $Tf \in \mathcal{L}(E)$. -T est linéaire : (évident).
   -T est continue
   $$|Tf| \leq x\|f\|_\infty \text{ alors } \|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$
2. — Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a
   $$T^n f(x) := \int_0^x K_n(x,t) f(t)\, dt \quad \text{ où } \quad K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$
   Démontrons le résultat par récurrence. Pour $n = 1$, on a bien $K_1(x,t) = 1$. Supposons le résultat vrai pour un $n \geq 1$ c'est à dire $K_n(x,t) = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et donc
   $$T^n f(x) := \int_0^x K_n(x,t) f(t)\, dt$$
   et
   $$T^{n+1} f(x) := \int_0^x (T^n f)(t)\, dt = \int_0^x \Big[\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\, du \Big]\, dt$$
   En échangeant l'ordre d'intégration, on obtient :
   $$T^{n+1} f(x) := \int_0^x \Big[\int_u^x \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\, du \Big]\, dt = \int_0^x \frac{(x-u)^n}{n!} f(u)\, du$$

— En déduire la valeur de la norme de :

$$|T^n f(x)| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}|f(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \leq \frac{x^n}{n!}\|f\|_\infty$$

D'où $\|T\| \leq \dfrac{1}{n!}$.
Maintenant, pour $f_0(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$, on obtient

$$Tf_0(t) = \int_0^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du = \frac{x^n}{n!}.$$

D'où $\|T^n f_0\|_\infty = \dfrac{1}{n!}$, finalement $\|T^n\| = \dfrac{1}{n!}$

3. — Le Développement limité de la fonction g au voisinage de 0.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Soit $S : E \to E,\ f \to Sf(x) := \displaystyle\int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt$.

— $Sf \in \mathcal{L}(E)$: - Linéaire : (évident)
-Continue :

$$|Sf(x)| \leq e^x \int_0^x e^{-t}|f(t)|\,dt \leq e^x\|f\|_\infty \int_0^x e^{-t}\,dt = e^x\|f\|_\infty[1-e^{-x}] \leq e^x\|f\|_\infty \leq e\|f\|_\infty$$

Alors $\|Sf\|_\infty \leq e\|f\|_\infty$

— Montrer que $\|S - \sum\limits_{n\geq 1}^{p} T^n\| \to 0$ quand $p \to \infty$ Comme E est complet, la série $\sum\limits_{n\geq 1} T^n$ est convergente et on a pour tout p entier :

$$\sum_{n\geq 1}^{p} T^n f(x) = \int_0^x \sum_{n\geq 1}^{p} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f(t)dt.$$

$$\big|\big(S - \sum_{n\geq 1}^{p} T^n\big) f(x)\big| \leq \int_0^x |e^{x-t} - \sum_{n\geq 1}^{p} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}||f(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty \int_0^x |e^{x-t} - \sum_{n\geq 1}^{p} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}|\,dt$$

d'où, en faisant le changement de variable $u = x - t$, l'inégalité

$$\big|\big(S - \sum_{n\geq 1}^{p} T^n\big) f(x)\big| \leq \|f\|_\infty \int_0^x |e^u - \sum_{n\geq 1} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}|\,du \leq \|f\|_\infty \sup_{0\leq u\leq 1} |e^u - \sum_{n\geq 1}^{p} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}|$$

Donc

$$\big\|S - \sum_{n\geq 1}^{p} T^n\big\| \leq \|f\|_\infty \sup_{0\leq u\leq 1} |e^u - \sum_{n\geq 1}^{p} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}|$$

Comme la série $\sum\limits_{n\geq 0}^{p} \frac{u^n}{n!}$ converge uniformément vers e^u sur tout compact de $\mathbb{R}$, il vient $S = \sum\limits_{n\geq 1} T^n$ en faisant tendre p vers l'infini.

4. Montrer que :

$$(I-T)\big(\sum_{n\geq 1}^{p} T^n\big) = \big(\sum_{n\geq 1}^{p} T^n\big)(I-T) = I - T^{p+1},$$

on obtient que

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} T^n = I + S.$$

Soit maintenant $g \in E$, alors on a $f = (I - T)^{-1}g = (I + S)g$, donc

$$f(x) = g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t)\, dt \qquad\qquad \forall g \in E.$$

Exercice-03 : **(06 points)**

Soit $\alpha \in [0,1]$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux distincts de $[0,1]$ qui converge vers le point α. On note $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_E = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ pour $f \in E$, on pose

$$Lf(x) = \sum_0^{\infty} \big(\frac{-1}{2}\big)^n f(x_n).$$

1. Montrer que L est une forme linéaire (évident).

2. Soit $f \in E$ tel que $\|f\|_E \leq 1$. En utilisant la continuité de f en α, montrer que $|L(f)| < 2$ (évident).