Université AbouBekr Belkaid-Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire 2021-2022

Master 1 : Probabilités-Statistiques
Module : Théorie de l'intégration

Contrôle continu : Théorie de l'intégration

Exercice 1. *On considère l'espace mesuré* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *où* λ *est la mesure de Lebesgue. Soit*

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [4^{-n},\, 4^{-n+\frac{1}{2}}].$$

Montrer que $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ *et calculer* $\lambda(A)$.

Solution
On sait que la tribu Borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est aussi engendrée par les intervalles fermés bornés (La tribu engendrée par les intervalles fermés coïncide avec la tribu Borélienne), ainsi A est un Borélien comme réunion dénombrable de Boréliens. **(1 pt)**
Comme la mesure de Lebesgue de tout intervalle est sa longueur nous avons

$$\lambda([4^{-n},\, 4^{-n+\frac{1}{2}}]) = 4^{-n+\frac{1}{2}} - 4^{-n} = 2 \times 4^{-n} - 4^{-n} = 4^{-n}. \qquad \textbf{(0.5 pt)}$$

Les ensembles $[4^{-n},\, 4^{-n+\frac{1}{2}}]$ sont deux à deux disjoints **(0.5 pt)**.
Ainsi

$$\lambda(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda([4^{-n},\, 4^{-n+\frac{1}{2}}]) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}. \qquad \textbf{(1 pt)}$$

Exercice 2. *I. Rappeler la définition de la mesure extérieure.*
II. Soit μ^* *une mesure extérieure sur un ensemble* E*. Montrer que si* A *est négligeable alors pour tout* $B \subset E$*, on a*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

III. Soit μ^* *une mesure extérieure sur un ensemble* E*. Supposons que* μ^* *est* <u>*additive*</u> *sur* E*. Montrer que* μ^* *est une mesure sur* $(E, \mathscr{P}(E))$.

Solution
I. <u>Définition :</u> **(1 pt)** Soit E un ensemble. Une **mesure extérieure** sur E est une application

$$\mu^* : \mathscr{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

telle que
i) $\mu^*(\emptyset) = 0\,;$
ii) μ^* est croissante : si $A \subset B \subset E$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)\,;$
iii) μ^* est sous-σ-additive : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

II. Par la sous-additivité de la mesure extérieure, on a

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

D'autre part, on a $B \subset A \cup B$ donc par croissance de la mesure extérieure

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B).$$

Ainsi

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B),$$

puisque A est négligeable i.e., $\mu^*(A) = 0$. Et par suite

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B). \qquad \textbf{(1.5 pt)}$$

III. Il suffit de montrer que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E deux à deux disjointes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Remarquons que

$$\bigcup_{n=0}^{N} A_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n,\ \forall N \in \mathbb{N},$$

donc par la croissance et l'additivité de la mesure extérieure

$$\sum_{n=0}^{N} \mu^*(A_n) = \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right),$$

et par le passage à la limite quand $N \to +\infty$ on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right). \qquad \textbf{(1.5 pt)}$$

Exercice 3. *I. Rappeler le lemme de Fatou.*
II. Soit $(E, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\int_E f_n d\mu \leq M$ pour tout $n \geq 0$. Démontrer que $\int_E f d\mu \leq M$.

Solution
I. Lemme de Fatou : Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables positives sur E (à valeurs dans $[0, +\infty]$), alors

$$\int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu. \qquad \textbf{(2 pts)}$$

II. (f_n) converge simplement vers f, ainsi on a

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \ \forall x \in E.$$

Par le lemme de Fatou on a

$$\int_E f d\mu = \int_E \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \sup_n \inf_{k\geq n} \int_E f_k d\mu \leq M. \qquad \textbf{(2 pts)}$$

Exercice 4. *I. Soient $(E, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré et $h : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que*

$$\mu\left(\{x \in E : \, |h(x)| \geq \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_E |h|^p d\mu,$$

pour tout $\alpha > 0$ et $p > 0$.
II. Soient $(E, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$ et $h \in \mathcal{L}^1(E)$. Posons $\mathbb{E}(h) = \int_E |h| d\mu$. Montrer que

$$\mu\left(\{x \in E : \, |h(x) - \mathbb{E}(h)| \geq \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha^2} \left(\int_E h^2 d\mu - (\mathbb{E}(h))^2\right),$$

pour tout $\alpha > 0$.

Solution
I. Soient $(E, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré et $h : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.
Posons

$$A = \{x \in E : \, |h(x)| \geq \alpha\} = (|h|)^{-1}([\alpha, +\infty[) \in \mathscr{F}.$$

On a

$$\forall x \in E, \ |h(x)| \geq |h(x)|\chi_A(x) \geq \alpha\chi_A(x),$$

donc, pour $p > 0$

$$\forall x \in E, \ |h(x)|^p \geq |h(x)|^p\chi_A(x) \geq \alpha^p\chi_A(x),$$

ainsi

$$\int_E |h|^p d\mu \geq \int_E |h|^p \chi_A d\mu \geq \int_E \alpha^p \chi_A d\mu = \int_A \alpha^p d\mu = \alpha^p \mu(A).$$

Donc

$$\mu(A) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_E |h|^p d\mu, \qquad \textbf{(2 pts)}$$

pour tout $\alpha > 0$ et $p > 0$.

II. Soient $(E, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$ et $h \in \mathcal{L}^1(E)$. Posons $\mathbb{E}(h) = \int_E h d\mu$. Posons

$$f = h - \mathbb{E}(h)$$

et

$$B = \{x \in E : |f| \geq \alpha\} = (|f|)^{-1}([\alpha, +\infty[) \in \mathscr{F}.$$

On a d'après la première question pour $\alpha > 0$ et $p = 2$

$$\mu(B) \leq \frac{1}{\alpha^2} \int_E |f|^2 d\mu, \qquad \textbf{(1 pts)}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mu(B) &\leq \frac{1}{\alpha^2} \int_E [h - \mathbb{E}(h)]^2 d\mu, \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \int_E [h^2 - 2h\mathbb{E}(h) + (\mathbb{E}(h))^2] d\mu, \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \left[\int_E h^2 d\mu - \int_E 2h\mathbb{E}(h) d\mu + \int_E (\mathbb{E}(h))^2 d\mu \right] \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \left[\int_E h^2 d\mu - 2\mathbb{E}(h) \int_E h d\mu + \int_E (\mathbb{E}(h))^2 d\mu \right] \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \left[\int_E h^2 d\mu - 2\mathbb{E}(h)\mathbb{E}(h) + \int_E (\mathbb{E}(h))^2 d\mu \right] \qquad \textbf{(2 pts)} \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \left[\int_E h^2 d\mu - 2\mathbb{E}(h)\mathbb{E}(h) + (\mathbb{E}(h))^2 \underbrace{\int_E d\mu}_{\mu(E)=1} \right] \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \left[\int_E h^2 d\mu - (\mathbb{E}(h))^2 \right],
\end{aligned}$$

pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 5. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Que vaut la limite*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x) d\lambda(x) \, ?$$

Solution
Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Notons $f_n(x) = f(x)\cos^n(\pi x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est mesurable (comme produit de fonctions mesurables). **(0.5 pt)**
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ presque partout puisque $\cos(\pi x) < 1$ si $x \notin \mathbb{Z}$, et donc $\cos^n(\pi x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ presque partout (pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\lambda(\mathbb{Z}) = 0$ car $\mathbb{Z}$ est dénombrable). **(1.5 pt)**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ et comme $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, par le théorème de convergence dominée, **(1 pt)**

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos^n(\pi x) d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) d\lambda(x) = 0. \qquad \textbf{(1 pt)}$$