Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année universitaire : 2021-2022.

**Master I :** Probabilités-Statistiques
**Module :** Analyse Fonctionnelle I
Durée : 1h30

# Contrôle Continu

**Exercice-01** : **(06 points)**

I. Soit $(f_n)_n$ une suite dans $E'$. Montrer que si $x_n \to x$ et $f_n \rightharpoonup f$ faible* $\Longrightarrow < f_n, x_n > \to < f, x >$.

II. Citer le théorème de Hahn-Banach (deuxième forme géométrique).

III. Citer le théorème de Baire.

**Exercice-02** : **(06 points)**

Soit $\mathcal{C}([0,1]) = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme usuelle :

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|.$$

On considère $E = \{u \in \mathcal{C}([0,1]); u(0) = 0\}$, de sorte que $E$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}([0,1])$.
On considère la forme linéaire

$$f : u \in E \longmapsto f(u) = \int_0^1 u(t)\, dt.$$

1. Montrer que $f \in E'$ et calculer $\|f\|_{E'}$.

2. Peut-on trouver $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $f(u) = \|f\|_{E'}$

**Exercice-03** : **(08 points)**
Soit $Y = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions réelles continues définies sur $[0,1]$, muni de la norme uniforme $\|.\|_\infty$, et soit $X$ un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}([0,1])$, dont tous les éléments sont continûment dérivables. On définit $T : X \to Y$ par $\forall f \in X, Tf = f'$. On note

$$G(T) = \{(f, Tf), f \in X\}$$

le graphe de $T$.

1. Montrer que $G(T)$ est fermé dans $X \times Y$.
2. En déduire qu'il existe un entier $N \geq 1$ telque $\|f'\|_\infty \leq N$ pour toute $f \in X$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$.
3. On pose $x_n = \frac{n}{N}$ pour $0 \leq n \leq N$, et on définit $S : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ par $S(f) = (f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n))$.
   a. On suppose que $\|f\|_\infty = 1$ et $S(f) = 0$. Montrer en utilisant le Théorème des accroissements finis, que l'on aboutit à une contradiction.
   b. En déduire que $X$ est de dimension finie et $dimX \leq N + 1$.

**Bonne chance.**

# Correction du control continu

**Exercice-01 (05 points) (Questions du cours)**

**Voir le cours**

**1-…(01 point)**

**2-…(02 points)**

**3-…(02 points)**

**Exercice-02 (06 points)**

1. **$||f||_{E'}$ = 1 (Notons qu'on peut prendre par exemple u(t)= $t^a$ pour tout a>0). … (03 points = 1.5 points +1.5 points)**

2. **Si u existe tel que, il faut avoir**

$$\int_0^1 (1-u)\,dt = 0$$

**Ce qui implique que u=1 (absurde) car u appartient à E.**

**……. (03 points)**

**Exercice 03 (09 points)**

1) Soit $f_n \in X$ tels que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \in X$ et $Tf \xrightarrow[n\to\infty]{} g \in \mathscr{C}([0,1])$. Cela signifie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $f$ et que $f_n' = Tf_n$ converge uniformément vers $g$. D'après un théorème classique de Weierstrass, il en résulte que $f$ est continûment dérivable et que $g = f'$. Cela montre que le graphe de $T$ est fermé.

2) Puisque $X$ (fermé dans un espace complet) et $\mathscr{C}([0,1])$ sont des espaces de Banach, le *Théorème du graphe fermé* dit que l'application linéaire $T$ est continue. Soit $N \geqslant 1$ un entier tel que $\|T\| < N$. Puisque $\|Tf\|_\infty \leqslant \|T\|\,\|f\|_\infty$ pour toute $f \in X$, on a bien $\|f'\|_\infty < N$ pour toute $f \in X$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

3) a) Si $S(f) = 0$, on a $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_N) = 0$. Soit $t \in [0,1]$ tel que $|f(t)| = 1$. Il existe un $j \in \{0,\ldots,N-1\}$ tel que $x_j < t < x_{j+1}$ ($t$ ne peut être l'un des $x_i$). D'après le *Théorème des accroissements finis*, il existe un $\xi$ entre $t$ et $x_{j+1}$ tel que $f(x_{j+1}) - f(t) = (x_{j+1} - t)\, f'(\xi)$. Alors :

$$1 = |f(t)| = |f(x_{j+1} - f(t)| = (x_{j+1} - t)\,|f'(\xi)| \leqslant (x_{j+1} - t)\,\|f'\|_\infty \leqslant \frac{1}{N}\,\|f'\|_\infty < 1\,,$$

ce qui n'est pas possible.

b) $S$ étant clairement linéaire, il résulte du a), par homogénéité, que, pour toute $f \neq 0$, on a $S(f) \neq 0$. Autrement dit, $S$ est injective. Par conséquent $\dim X \leqslant N+1$.