Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Mai 2022.
Eléments finis (Master1-EDP_S2)

Epreuve finale

(2 heures)

Questions de cours [09pts]

1) (K, P, Σ) étant un élément fini de Lagrange et P l'espace fonctionnel t.q. dim P = Card (Σ) = N. Soit $\{p_i\}_{i=1}^N$ une base de l'espace P. Quant est-ce que cette base est dite base de fonctions de forme ? (**1pt**)

2) Dans $\mathbf{R^n}$ ($n \geq 2$) un polyèdre est-il un n_simplexe ? Confirmer la réponse par une justification ou un contre-exemple. (**1pt**)
   Rappel : Un polyèdre de $\mathbf{R^n}$ est une intersection finie bornée et non vide de demi-espaces fermés limités par des hyperplans de $\mathbf{R^n}$.

3) Dans $\mathbf{R^n}$ comment peut-on vérifier qu'un polyèdre K possédant **m** sommets a_j (j=1,…,**m**) est un n_simplexe de $\mathbf{R^n}$? (**1pt**)

4) Dans **R** (n=1), qu'est-ce que le 1_simplexe ? (**1pt**)

5) Dans $\mathbf{R^2}$ proposer un exemple de 2_simplexe et un exemple de polyèdre (pas un 2_simplexe). (**1pt**)

6) Dans $\mathbf{R^3}$ préciser le 3_simplexe de **référence** en explicitant ses 4 sommets. Construire ensuite la matrice A_3 qui lui correspond et vérifier que les 4 sommets ne se trouvent pas simultanément dans un même hyperplan de $\mathbf{R^3}$. (**3pts**)

7) Montrer que les coordonnées barycentriques λ_i (i = 1,…,n+1) de tout point x de $\mathbf{R^n}$, par rapport aux sommets a_i (i = 1,…,n+1) d'un n_simplexe K de $\mathbf{R^n}$, sont des fonctions affines de x c'est-à-dire que :
   $\lambda_i : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ (**1pt**)

$$x \to \lambda_i(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + b_{i,n+1} \qquad \text{pour } i = 1,\dots,n+1. \ (x = (x_1 , \dots ,x_n)^T)$$

Problème [11pts]

Etant donné un problème variationnel général (PVG) sur V= H_0^1 (a,b) : $\forall$ v $\in$ V a(u , v) = L(v) admettant une solution unique u $\in$ V où l'on rappelle que a est une forme bilinéaire continue sur VxV, V-elliptique et L est une forme linéaire continue sur V, on désire alors utiliser une méthode d'éléments finis P_1 pour approcher la solution u par une solution u_h solution du PAVG (P_h) : Trouver $u_h \in V_h$ t.q. $a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$ où V_h est un sous-espace de dimension finie d'approximation de V.

On partage alors l'intervalle [a , b] en N+1 sous-intervalles de longueur $h_i = a_{i+1} - a_i$ (i = 0,…,N) : $K_i = [a_i , a_{i+1}]$ i = 0,…,N (a_0 = a, a_{N+1} = b et $a_{i+1} = a_i + h_i$, i = 0,…,N).

1) Dans cette discrétisation, quels sont les 1_simplexes auxquels on peut associer des éléments finis 1_simpliciaux (éléments finis 1_simplexes de type (1)) ? Justifier. (**1pt**)

2) Préciser, dans ce cas, la triangulation correspondante en la justifiant. (**1pt**)

3) L'intervalle [0 , 1] étant le 1_simplexe de référence, déterminer les coordonnées barycentriques de tout point de $\overline{K}$ = [0 , 1]. (**1pt**)

4) Préciser $\overline{\Sigma_1}$ le treillis principal d'ordre 1 associé à $\overline{K}$ et montrer que $\overline{\Sigma_1} = \{0,1\}$. (**1pt**)

5) Déterminer la base de fonctions de forme de $\overline{P_1}$ (espace des fonctions affines sur [0 , 1]) à partir de la formule générale donnant la fonction de forme p_m de multi-indice $m = (m_1, \ldots, m_n)$ de P_k (espace des polynômes de n variables de degré $\leq$ k. Voir rappel A)). Vérifier ensuite que dim $\overline{P_1}$ = Card ($\overline{\Sigma_1}$). (**2pts**)

6) Utilisant la formule générale donnant la transformation affine inversible F (Voir rappel C)), déterminer l'application affine inversible F_i qui assure l'équivalence affine entre les deux éléments finis 1_simpliciaux : ($\overline{K}$, $\overline{P_1}$, $\overline{\Sigma_1}$) et (K_i , $P_{1,i}$, Σ_{1i}) où $K_i = [a_i , a_{i+1}]$, $P_{1,i}$ est l'espace des polynômes à une variable de degré $\leq$ 1 sur K_i et enfin $\Sigma_{1i} = \{a_i , a_{i+1}\}$. Déterminer ensuite F_i^{-1} . (**1.5pts**)

7) Vérifier alors que $K_i = F_i(\overline{K})$ et que $\Sigma_{1i} = F(\overline{\Sigma_1})$ pour i = 0,…,N. (**1.5pts**)

8) Déterminer explicitement la base de fonctions de forme de $P_{1,i}$ dans l'élément fini 1_simplicial (K_i ,$P_{1,i}$, Σ_{1i}) à partir de l'application affine-inversible F_i (i = 0,…,N) et l'élément fini de référence ($\overline{K}$, $\overline{P_1}$, $\overline{\Sigma_1}$). (**2pts**)

<u>Rappels utiles</u> (Dans le cas général : Dans $\mathbf{R^n}$ avec $k \in \mathbf{N}^*$)

A) Pour un élément fini n-simplexe de type (k) : (K, P_k , Σ_k) la fonction de forme de multi-indice : $m = (m_1, \ldots , m_n)$ (avec $\sum_{j=1}^{n+1} m_j = k \;\; k \in N^*$) de l'espace P_k ($k \geq 1$), est donnée par la formule suivante :

$$p_m(x) = \prod_{j=1}^{n+1} (m_j!)^{-1} . \prod_{\substack{j=1 \\ m_j \geq 1}}^{n+1} \left[\prod_{i=0}^{m_j - 1} (k\lambda_j(x) - i) \right]$$ où $x \in K \subset R^n$ et $\lambda_j(x)$ est la j<u>ème</u> coordonnée barycentrique de x par rapport aux sommets a_j (j = 1,…,n+1) du n-simplexe K.

B) Pour le même élément fini (K, P_k , Σ_k), le treillis principal est :

$$\Sigma_k = \left\{ x \in R^n / \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\} \text{pour } j = 1, \ldots, n+1 \right\} \; (k \in N^*).$$

C) La formule générale donnant la transformation affine-inversible F assurant l'équivalence affine entre deux éléments finis n_simplexes de type (k) : (K, P_k , Σ_k) et ($\overline{K}$,$\overline{P_k}$,$\overline{\Sigma_k}$) est la suivante :

F : $\overline{K} \subset \mathbf{R^n} \rightarrow K \subset \mathbf{R^n}$

$\overline{x} \rightarrow x = F(\overline{x}) = \mathbf{B'}\,\overline{x} + b$ où **B'** est la première sous-matrice d'ordre n de $\mathbf{B} = A_n \overline{A_n}^{-1}$.

On rappelle alors que **B** est d'ordre n+1 puisque A_n et $\overline{A_n}^{-1}$ le sont. On rappelle aussi que :

$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_{n+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ où a_j (j=1,…,n+1) sommets du n_simplexe K et $\overline{A_n} = \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_{n+1}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $\overline{a_j}$ (j=1,…,n+1) sommets du n_simplexe $\overline{K}$. On rappelle également que b est un vecteur de $\mathbf{R^n}$ regroupant les n premiers éléments de la dernière colonne de la matrice (d'ordre n+1) **B**.

Remarque : Dans R (n=1)

F : $\overline{K} = [\overline{a}, \overline{b}] \rightarrow K = [a, b]$

$\overline{x} \rightarrow x = F(\overline{x}) = \alpha\,\overline{x} + \beta$ où α et $\beta \in \mathbf{R}$ avec $\alpha \neq 0$ (F étant inversible).

On a alors :

$\forall\, \overline{p} \in \overline{P_k} \;\; \exists!\, p \in P_k / \overline{p} = p \circ F$ et aussi $\forall\, p \in P_k \;\; \exists!\, \overline{p} \in \overline{P_k} / p = \overline{p} \circ F^{-1}$.

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Mai 2022.
Eléments finis (Master1-EDP_S2)

Corrigé de l'épreuve finale

Questions de Cours

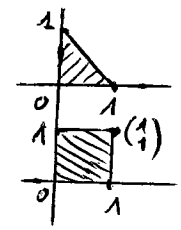
1) $\mathrm{Card}(\Sigma) = N \Rightarrow \exists\, N$ points distincts de K : a_j $(j = \overline{1,N})$ t.q. $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^{N}$. Dans ce cas la base $\{p_i\}_{i=1}^{N}$ est une base de fctions de forme pour l'espace P ssi $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ $\forall\, i,j = \overline{1,N}$. (1pt)

2) Non puisque le n-cube est un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ possédant 2^n sommets alors que le n-simplexe n'en possède que $(n+1)$ sommets au maximum $(n \geq 2)$. (1pt)

3) Il suffit de vérifier que $m = n+1$ et que la matrice $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{n+1} \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (0.5pt) (0.5pt)

4) Dans $\mathbb{R}$, tout intervalle $[a,b]$ non dégénéré (c.à d. t.q. $a \neq b$) est un 1-simplexe. (0.5pt) (0.5pt)

5) Dans $\mathbb{R}^2$: Exple de 2-simplexe : Triangle $\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ (0.5pt)
Exple de polyèdre : Carré $\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ (0.5pt)



6) Dans $\mathbb{R}^3$, le 3-simplexe de référence est le tétraèdre non dégénéré de sommets : $a_1 = (1,0,0)^T$, $a_2 = (0,1,0)^T$, $a_3 = (0,0,1)^T$ et $a_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (1pt)
$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (1pt) avec $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ les 4 sommets ne se trouvent pas simultanément ds 1 m̂ hyperplan de $\mathbb{R}^3$ (1pt)

7) Il suffit, pour cela, de résoudre le syst. lin. (sous forme matricielle) permettant de définir les coords barycentriques $\lambda_i(x)$ $(i = \overline{1,n+1})$ en fction des coords cartésiennes $x_j(x)$ $(j = \overline{1,n})$:

$$A_n \begin{bmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_{n+1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_{n+1}(x) \end{bmatrix} = A_n^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} & b_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n+1,1} & \cdots & b_{n+1,n} & b_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$ (0.5pt)

$\Rightarrow \forall\, i = 1, \dots, n+1 \quad \lambda_i(x) = b_{i,1} x_1 + b_{i,2} x_2 + \dots + b_{i,n} x_n + b_{i,n+1}$ (0.5pt)

c.à d. $\lambda_i : X = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \lambda_i(x) = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\, x_j + b_{i,n+1}$ pour $i = \overline{1,n+1}$

Problème

1) Ds cette discrétisation, les 1-simplexes sont les intervalles $K_i = [a_i, a_{i+1}]$ (0,5pt) pour $i = 0, \dots, N$ puisque $\forall i = 0, \dots, N$ $a_i \neq a_{i+1}$ (0.5pt)

2) La triangulation correspondante est $\mathcal{T}_h = \{K_i\}_{i=0}^{N}$ (0.5pt) car $\mathring{K}_i \cap \mathring{K}_j = \emptyset$ $\forall i,j = \overline{0,N}$ t.q. $i \neq j$ (0,5pt)
$K_i \cap K_{i+1} = \{a_{i+1}\}$ $i = 0, \dots, N-1$ avec $a_0 = a$ et $a_{N+1} = b \in \partial([a,b]) = \{a, b\}$ ($h = \max h_i$)

3) $\overline{K} = [0,1]$, les sommets de $\overline{K}$ étant les bornes 0 et 1 $\Rightarrow \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \end{pmatrix} = \overline{A}_1^{-1} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x \\ x \end{bmatrix}$ Donc $\forall x \in \overline{K}$ $\lambda_1(x) = 1 - x$ et $\lambda_2(x) = x$ (0.5pt) + (0.5pt)

Vérif. $\forall x \in \overline{K} = [0,1]$ $\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1 - x + x = 1$

4) $\overline{\Sigma}_1 = \{x \in \mathbb{R} \text{ (ou } [0,1]) / \lambda_j(x) \in \{0,1\}\ j = 1,2\}$ ($k = 1$ $m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = 1$ ou $m_1 = 1 \Rightarrow m_2 = 0$)

Ici il y a 2 possibilités pour exprimer les coords barycentriques des pts de $\overline{\Sigma}_1$:

1ère possibilité : $\lambda_1(x) = 0$ et $\lambda_2(x) = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{0}{1}(0) + \frac{1}{1}(1) = 1 \in \overline{\Sigma}_1$

2nde possibilité : $\lambda_1(x) = 1$ et $\lambda_2(x) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{1}(0) + \frac{0}{1}(1) = 0 \in \overline{\Sigma}_1$

$\Rightarrow \overline{\Sigma}_1 = \{0, 1\} = \partial \overline{K}$ (0.5pt) + (0.5pt)

5) Détermination de la base de fonctions de forme de $\overline{P}_1$:

Ici $k = 1$ et $n = 1$. On a déjà vu en 4) que, ds ce cas, il n'y a que 2 possibilités :

pour les valeurs entières des m_j $(j = 1, 2)$: $m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = k - m_1 = 1 - m_1 = 1$

$m_1 = 1 \Rightarrow m_2 = 1 - m_1 = 1 - 1 = 0$

La formule générale donnant les fonctions de forme (Voir Rappel A) entraîne que

$m_1 = 0$ et $m_2 = 1$ $\overline{p}_0(x) = \underbrace{\prod_{j=1}^{2} (m_j!)^{-1}}_{} \prod_{\substack{j=1 \\ m_j > 0}}^{2} \left(\prod_{i=0}^{m_j - 1} (\lambda_j(x) - i) \right) = \prod_{i=0}^{m_2 - 1} (\lambda_2(x) - 0) = \lambda_2(x) = x$ (0,75pt)

$m_1 = 1$ et $m_2 = 0$ $\overline{p}_1(x) = 1 \prod_{\substack{j=1 \\ m_j > 0}}^{2} \left(\prod_{i=0}^{m_j - 1} (\lambda_j(x) - i) \right) = \prod_{i=0}^{m_1 - 1} (\lambda_1(x) - 0) = \lambda_1(x) = 1 - x$ (0,75pt)

Donc les fonctions de forme de $\overline{P}_1$ sont : $\overline{p}_0(x) = x$ et $\overline{p}_1(x) = 1 - x$. Après renumérotation (pour respecter les indices des coords barycentriques), on peut écrire :

$\overline{p}_1(x) = \lambda_1(x) = 1 - x$ et $\overline{p}_2(x) = \lambda_2(x) = x$.

Donc $\dim \overline{P}_1 = 2 = \mathrm{Card}(\overline{\Sigma}_1) = \frac{(1+1)!}{1!\,1!} = 2$ (0.5pt)

6) D'après le rappel C), en dimension $n = 1$ et lorsque $\overline{K} = [0,1]$ et $K_i = [a_i, a_{i+1}]$, on a

$A_1 = \begin{bmatrix} a_i & a_{i+1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Donc $B = A_1 . \overline{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} a_i & a_{i+1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_i + a_{i+1} & a_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Donc $x = F_i(\overline{x}) = (-a_i + a_{i+1})\overline{x} + a_i = (a_{i+1} - a_i)\overline{x} + a_i$ | $B' = -a_i + a_{i+1} \neq 0$ car $a_{i+1} \neq a_i$, $b = a_i$ (1pt)

F_i est affine-inversible car $a_{i+1} - a_i \neq 0$ $\forall i = \overline{0,N}$

$x = (a_{i+1} - a_i)\overline{x} + a_i \Rightarrow x - a_i = (a_{i+1} - a_i)\overline{x} \Rightarrow \overline{x} = F_i^{-1}(x) = \frac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i}$ (0.5pt)

Donc $F_i^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto F_i^{-1}(x) = (x - a_i)/(a_{i+1} - a_i)$

7) On vérifie ici que $K_i = F_i(\overline{K})$ et que $\Sigma_i = F_i(\overline{\Sigma}_1)$ pour $i = 0, \dots, N$: (0,5pt)

$\overline{x} \in [0,1] \Longleftrightarrow 0 \leq \overline{x} \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq (a_{i+1} - a_i)\overline{x} \leq a_{i+1} - a_i$

$\Longleftrightarrow a_i \leq (a_{i+1} - a_i)\overline{x} + a_i \leq a_{i+1} \Longleftrightarrow a_i \leq x = F_i(\overline{x}) \leq a_{i+1} \Longleftrightarrow x = F_i(\overline{x}) \in K_i$

Suite de la réponse à la question 7) du problème :

Cette chaîne d'équivalences signifie que si $x \in K_i \Rightarrow \exists! \, \bar{x} \in \bar{K}$ t.q. (0,5pt)
$x = F_i(\bar{x}) \Rightarrow x \in F_i(\bar{K})$ ce qui m.q. $K_i \subset F_i(\bar{K})$. Inversement, si $x \in F_i(\bar{K})$
$\Rightarrow \exists! \, \bar{x} \in \bar{K} / x = F_i(\bar{x}) \Rightarrow a_i \leq x \leq a_{i+1}$ c.à.d. $x \in K_i$ (car $\forall \bar{x} \in \bar{K}$ $F_i(\bar{x}) \in K_i$) : $F_i(\bar{K}) \subset K_i$

$\bar{\Sigma}_1 = \{0, 1\}$ $\bar{a}_1 = 0 \Rightarrow x = F_i(\bar{a}_1) = F_i(0) = a_i \in \Sigma_i$

$\bar{a}_2 = 1 \Rightarrow x = F_i(\bar{a}_2) = F_i(1) = (a_{i+1} - a_i) \times 1 + a_i = a_{i+1} \in \Sigma_i$ (0,5pt)

Comme $\mathrm{Card}(\Sigma_i) = 2 \Rightarrow \Sigma_i = \{a_i, a_{i+1}\} = \{F_i(0), F_i(1)\} = F(\bar{\Sigma}_1)$.

8) $\dim P_1 = 2$. On note par $p_{i,1}$ et $p_{i,2}$ les fctions de forme de $P_{1,i}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$

D'après la question 5) les fctions de forme de $\bar{P}_1$ sur $[0,1]$ sont :

$\bar{p}_1(\bar{x}) = \lambda_1(\bar{x}) = 1 - \bar{x}$ et $\bar{p}_2(\bar{x}) = \lambda_2(\bar{x}) = \bar{x}$ $(\forall \bar{x} \in [0,1])$

D'après 6) $F_i(\bar{x}) = (a_{i+1} - a_i)\bar{x} + a_i$ et $F_i^{-1}(x) = \dfrac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i}$

Donc $p_{i,1} = \bar{p}_1 \circ F_i^{-1}$ c.à.d. $\forall x \in [a_i, a_{i+1}]$ $p_{i,1}(x) = (\bar{p}_1 \circ F_i^{-1})(x)$

$= \bar{p}_1(F_i^{-1}(x)) = 1 - F_i^{-1}(x)$

$= 1 - \dfrac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i} = \dfrac{a_{i+1} - a_i - x + a_i}{a_{i+1} - a_i}$

$= \dfrac{a_{i+1} - x}{a_{i+1} - a_i} = p_{i,1}(x)$

<u>Vérif.</u> pour $p_{i,1}$: $p_{i,1}(a_i) = \dfrac{a_{i+1} - a_i}{a_{i+1} - a_i} = 1$

$p_{i,1}(a_{i+1}) = \dfrac{a_{i+1} - a_{i+1}}{a_{i+1} - a_i} = 0$

De même $p_{i,2} = \bar{p}_2 \circ F_i^{-1}$

c.à.d. $\forall x \in [a_i, a_{i+1}]$ $p_{i,2}(x) = (\bar{p}_2 \circ F_i^{-1})(x) = \bar{p}_2(F_i^{-1}(x)) = F_i^{-1}(x)$

$= \dfrac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i} = p_{i,2}(x)$

<u>Vérif.</u> pour $p_{i,2}$: $p_{i,2}(a_i) = \dfrac{a_i - a_i}{a_{i+1} - a_i} = 0$ et $p_{i,2}(a_{i+1}) = \dfrac{a_{i+1} - a_i}{a_{i+1} - a_i} = 1$

<u>Conclusion</u> : $p_{i,1}(x) = \dfrac{a_{i+1} - x}{a_{i+1} - a_i}$ et $p_{i,2}(x) = \dfrac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i}$