Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département demathématiques
Master 1: EDP et applications

A.U. 2021/2022

Contrôle: Théorie spectrale des opérateurs

Exercice 1
Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal.
Montrer que A est inversible si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que $\|Ax\| \geq M \|x\|$ pour tout $x \in H$.

Exercice 2
Soit H un espace de Hilbert complexe et $A, B \in \mathcal{L}(H)$.
Montrer que les opérateurs AB et BA ont le meme rayon spectrale.

Exercice 3
On considère $H := L^2(]-1,1[, \mathbb{C})$ munit du produit scalaire suivant:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

On considère l'opérateur

$$Af(x) = \int_{-1}^{1} e^{itx} f(t)\, dt \quad \text{où } f \in H \text{ et } x \in]-1,1[$$

1/ Montrer que pour tout $f \in H$,on a:
i/ $Af \in C([-1,1], \mathbb{C})$.
ii/ A est continu de H dans $C([-1,1], \mathbb{C})$.
2/ Montrer que A: $H \to C([-1,1], \mathbb{C})$ est un opérateur compact (utiliser l'inégalité des accroissements fini).
3/ Endéduire que A est vu comme un opérateur de H dans lui même est un opérateur compact.
4/ Calculer A^*.
5/ Donner l'expression simple de A^*A.
Rappel: inégalité des accroissements fini
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$. Alors $\forall x_1, x_2 \in I$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$.

Corrigé contrôle 2022

Exercice 1 : Voir TD.

Exercice 2 :

$A, B \in \mathcal{L}(H)$.

Mq AB et BA ont le même rayon spectral.

$(AB)^n = A(BA)^{n-1}B \qquad (BA)^n = B(AB)^{n-1}A$.

$$\|(AB)^n\|^{1/n} = \|A(BA)^{n-1}B\|^{1/n}$$
$$\leq \|A\|^{1/n} \|(BA)^{n-1}\|^{1/n} \|B\|^{1/n}$$
$$\leq \|A\|^{1/n} \|(BA)^n\|^{1/n} \|(BA)^{-1}\|^{1/n} \|B\|^{1/n}$$

$$r(AB) = \lim_{n\to+\infty} \|(AB)^n\|^{1/n}$$
$$r(BA) = \lim_{n\to+\infty} \|(BA)^n\|^{1/n}.$$

Ainsi $r(AB) \leq r(BA)$ (1). D'une manière analogue on montre que $r(BA) \leq r(AB)$ (2)

de (1) et (2) on conclut que $r(AB) = r(BA)$.

Ex3 :

$H = L^2(]-1,1[, \mathbb{C})$; $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

$Af(x) = \int_{-1}^{1} e^{itx} f(t)\,dt$ où $f \in H$.

Mq $Af \in C([-1,1], \mathbb{C})$.

si $x_n \to x$ ds $]-1,1[$ alors on a la cvgce simple de $e^{itx_n}f(t) \to e^{itx}f(x)$. On a $|e^{itx}f(t)| \leq f(t)$, f est intégrable sur $[-1,1]$ puisque continue ; On déduit que $A(f)$ est continue. De plus $\forall x \in [-1,1]$,

$$|Af(x)| \leq \int_{-1}^{1} |e^{itx}|\,|f(t)|\,dt \leq \sqrt{2}\,\|f\|_{L^2}$$

$\|Af\|_\infty \leq \sqrt{2}\, \|f\|_{L^2} \Rightarrow A$ est cont.

2/ Mq $A : L^2(]-1,1[, \mathbb{C}) \to C([-1,1], \mathbb{C})$ est cpt.

On applique le Th d'Ascoli-Arzela. Il suffit de montrer que $(A(\bar{B}_{(0,1)}))$ est relativement cpt.

On montre l'equicontinuité, pour $(x,y) \in [0,1]^2$ et $t \in [0,1]$, en utilisant l'inégalité des accroissement fini, on a

$$|e^{itx} - e^{ity}| \leq |tx - ty| \leq |t|\, |x-y| \leq |x-y|.$$

Alors

$$|Af(x) - Af(y)| \leq \int_{-1}^{1} |e^{itx} - e^{ity}|\, |f(t)|\, dt$$
$$\leq 2|x-y| \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt \leq 4|x-y|\, \|f\|_{L^2}.$$

Ainsi si $f \in B(E)$, $\forall \varepsilon > 0$ en prenant $\eta = \frac{4}{\varepsilon}$ on a

$|x-y| \leq \eta \Rightarrow |Af(x) - Af(y)| \leq \varepsilon \quad \forall f \in B(E)$.

$\forall f \in L^2$, Af est cont et $A(\bar{B}(E))$, $E = L^2(]-1,1[)$ est une famille équi continue de $C([-1,1], \mathbb{C})$.

le Th d'Ascoli-Arzela permet d'affirmer que $A(\bar{B}_E)$ est une partie relativement cpte de $C([-1,1], \mathbb{C})$

donc $A : L^2(]-1,1[, \mathbb{C}) \to C([-1,1], \mathbb{C})$ est cpt car

3/ $A : L^2(]-1,1[, \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{cpt}} C([-1,1], \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{cont}} L^2(]-1,1[, \mathbb{C})$

car $I_d : C([-1,1], \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{cont}} L^2(]-1,1[, \mathbb{C})$. (Composée d'une application cpte par cont $\Rightarrow$ application cpte.

4/ $$\langle Af, g\rangle = \int_{-1}^{1} \left(\underline{\int_{-1}^{1} e^{itx} f(t)\, dt} \right) \bar{g}(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(t) \left(\int_{-1}^{1} e^{-itx} g(x)\, dx \right) dt = \langle f, A^* g\rangle$$

$$A^* g(t) = \int_{-1}^{1} e^{-tx} g(x)\, dx.$$

$$A^*(Af(x)) = \int_{-1}^{1} e^{-ixy} \left(\int_{-1}^{1} e^{ity} f(t)\, dt \right) dy.$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} e^{iy(t-x)}\, dy \right) f(t)\, dt.$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{e^{i(t-x)} - e^{-i(t-x)}}{i(t-x)} f(t)\, dt.$$

$$A^*(Af(x)) = 2 \int_{-1}^{1} \frac{\sin(t-x)}{t-x} f(t)\, dt.$$