Université de Tlemcen A.U.2021/2022
Département de Mathématiques 14/04/2022

Controle continu
de
Méthodes de résolution des problèmes elliptiques

Exercice 1

Soient Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$. Pour $k > 0$,on considère le problème suivant

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)\ \|u-f\|_{L^2(\Omega)}=k} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution u_k.
2. Montrer qu' il existe $\lambda > 0$ tel que u_k est solution de

$$\begin{aligned} -\Delta u_k + \lambda (u_k - f) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Exercice2

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$,on considère le problème suivant

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^3 \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1a}$$

1. Donner la formulation faible (variationnelle) de $(1a)$.
2. Justifier pourquoi on ne peut appliquer le théorème de Lax-Milgram pour montrer l'existence de solution faible pour $(1a)$?
3. On considère $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Donner la fonctionnelle $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ associée à $(1a)$ en précisant la condition sur N pour que J soit bien définie sur $H_0^1(\Omega)$.
4. Montrer que J est C^1.
5. Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} J(ku)$.
6. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que $J(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \left(1 - \frac{C}{2} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)$. Préciser alors dans quelle boule $J(u) > 0$.
7. Soient $c \in \mathbb{R}$ et $(u)_n \subset H_0^1(\Omega)$,une suite telle que $J(u_n) \to c$ et $J'(u_n) \to 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$. En calculant $\frac{4J(u_n) - \langle J'(u_n), u_n \rangle}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}$ et en raisonnant par l'absurde, montrer que $(u_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.
8. De ce qui précède déduire l'existence de solutions faibles pour $(1a)$.

Université de Tlemcen A.U.2021/2022
Département de Mathématiques 14/04/2022

Corrigé du controle continu
de
Méthodes de résolution des problèmes elliptiques

Exercice 1 7pts

1. On reformule le problème comme suit:
   Posons
$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$
   et C l'ensemble
$$C = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : F(v) = 0 \right\}$$
   où
$$F(v) = \|v - f\|^2_{L^2(\Omega)} - k^2$$
   alors déterminer
$$\min_{u \in H_0^1(\Omega) \ \|u-f\|_{L^2(\Omega)} = k} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$
   revient à minimiser J sur C.
   L'ensemble C est un convexe fermé et la fonctionnelle J est strictement convexe. Il existe donc une unique solution $u_k$au problème de minimisation de J sur C

2. Les fonctionnelles J et F sont toutes deux dérivables et, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, on a
$$\langle J\prime(u_k); v \rangle = 2 \int_\Omega \nabla u_k . \nabla v dx$$
   et
$$\langle F\prime(u_k); v \rangle = 2 \int_\Omega (u_k - f) \, v dx$$
   on a $F\prime(u_k) \neq 0$,car $\|u_k - f\|_{L^2(\Omega)} = k$ et d'apès le cours, si u est un minimum local, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, appelé multiplicateur de Lagrange, tel que
$$J\prime(u_k) + \lambda F\prime(u_k) = 0$$
   c'est- à-dire tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$
$$\int_\Omega \nabla u_k . \nabla v dx + \int_\Omega \lambda (u_k - f) \, v dx = 0$$

La formule de Green permet d'écrire

$$-\int_{\Omega} \Delta u_k . v dx + \int_{\Omega} \lambda \left(u_k - f\right) v dx = 0$$

On déduit que u_k est solution du problème aux limites

$$\begin{array}{c} -\Delta u_k + \lambda \left(u_k - f\right) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u_k = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega \end{array}$$

Exercice2 $\boxed{15\text{pts}}$

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$,on considère le problème suivant

$$\begin{array}{c} -\Delta u = u^3 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \tag{1a}$$

1. $\boxed{1\text{pt}}$La formule de Green permet d'ecrire la formulation faible de $(1a)$,

$$\int_{\Omega} \nabla u . \nabla v dx = \int_{\Omega} u^3 v dx, \forall v \in H_0^1\left(\Omega\right)$$

$\boxed{1\text{pt}}$Le théorème de Lax-Milgram (dont la démonstration est basée essentiellement sur le théorème de représentation de Riez), ne peut s'appliquer pour $(1a)$ car $L_u, \left(L_u\left(v\right) := \int_{\Omega} u^3 v dx, \forall v \in H_0^1\left(\Omega\right)\right)$ dépend de u.($L_u$est linéaire peut etre continue sur $H_0^1\left(\Omega\right)$ en imposant des conditions sur u.)

$\boxed{2\text{pts}}$La fonctionnelle $J : H_0^1\left(\Omega\right) \to \mathbb{R}$ associée à $(1a)\, est$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^2 dx - \frac{1}{4}\int_{\Omega} u^4 dx$$

J est bien définie si $\int_{\Omega} u^4 dx$ est finie ce qui est vraie si on a l'injection $H_0^1\left(\Omega\right) \subset L^4(\Omega)$, donc si $4 \leq 2^*$ et cette injection est compacte si $4 < 2^* \Longleftrightarrow N < 4.i.e$ $N \leq 3$.

$\boxed{2\text{pts}}$

$$\begin{aligned} J\left(u+v\right) - J\left(u\right) \quad = \quad & \left(\int_{\Omega} \left(\nabla u . \nabla v\right) dx - \int_{\Omega} u^3 v dx\right) - \\ & \left(+\frac{3}{2}\int_{\Omega} u^2 v^2 dx + \int_{\Omega} u v^3 dx + \int_{\Omega} v^4 dx\right) \\ & \text{ce terme} = \mathrm{o}\left(\left\|v\right\|_{H_0^1(\Omega)}\right) \text{ quand } \left\|v\right\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \end{aligned}$$

.Ainsi J est Fréchet differentiable et

$$\langle J\prime(u), v\rangle = \int_{\Omega} (\nabla u.\nabla v)\, dx - \int_{\Omega} u^3 v dx$$

donc $J\prime(u) = -\Delta u - u^3$ dans $H^{-1}(\Omega)$ .On conclut alors que les solutions faibles de $(1a)$ sont des points critiques de J.

$\boxed{\text{1pt}}$Pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} J(ku) = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx - \frac{k^2}{4}\int_{\Omega} u^4 dx = -\infty$$

Donc en posant $w = ku$, on a $J(w) << 0$ si $\|w\|_{H_0^1(\Omega)} > R$ (R assez grand)

$\boxed{\text{2pts}}$Par continuité de l'injection $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$,il existe $C > 0$, tel que $\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ d'où,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{4}\|u\|^4_{L^4(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{C}{4}\|u\|^4_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\left(1 - \frac{C}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \end{aligned}$$

On déduit alors que $J(0) = 0$ et $J(u) > 0$ si $1 - \frac{C}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0$ i.e $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} < \sqrt{\frac{2}{C}}$.

$\boxed{\text{2pts}}$Soient $c \in \mathbb{R}$ et $(u)_n \subset H_0^1(\Omega)$,une suite telle que $J(u_n) \to c$ et $J'(u_n) \to 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} & \frac{4J(u_n) - \langle J'(u_n), u_n\rangle}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \\ = & \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}\left(2\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u_n\|^4_{L^4(\Omega)} - \|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u_n\|^4_{L^4(\Omega)}\right) \\ = & \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Si l'on suppose que $(u)_n$ n'est pas bornée : $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$, alors on obtient par$J(u_n) \to c$ et $J'(u_n) \to 0$ dans $H^{-1}(\Omega)$ que

$$\frac{4J(u_n) - \langle J'(u_n), u_n\rangle}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \to 0$$

et et le calcul $\frac{4J(u_n) - \langle J'(u_n), u_n\rangle}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} = \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$. Contradiction! Donc $(u)_n$ doit etre bornée.

$\boxed{2pts}$On peut alors en extraire une sous suite faiblement convergente notée encore $(u)_n$

$$\exists u \in H_0^1(\Omega)\,;\, u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

pour$N \leq 3$ l'injection $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ est compacte donc

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} u \text{ dans } L^4(\Omega)$$

D'autre part en utilisant l'inégalité de Holder et l'injection $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$,on a

$$\begin{aligned}
\left\|u_n^3 - u^3\right\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \left| \int_\Omega \left(u_n^3 - u^3\right) v dx \right| \\
&\leq \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \left\|u_n^3 - u^3\right\|_{L^{4/3}(\Omega)} \|v\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq C \left\|u_n^3 - u^3\right\|_{L^{4/3}(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Donc $u_n^3 \underset{n\to\infty}{\to} u^3$ dans $H^{-1}(\Omega)$.
En utilisant $J^{'}(u_n) \to 0$,on a

$$J^{'}(u_n) = -\Delta u_n - u_n^3 \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega)$$

d'où

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^{-1}\left(-\Delta u_n - u_n^3\right) &= u_n - \left(-\Delta^{-1}\right)\left(u_n^3\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \\
&\quad \text{Et } \; u_n^3 \underset{n\to\infty}{\to} u^3
\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir la convergence

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} \left(-\Delta^{-1}\right)\left(u^3\right)$$

La condition de Palais Smale est alors vérifiée.

$\boxed{2pts}$ Toutes les conditions du théorème du col se trouvent vérifiées par les les questions 5,6 7 ce qui permet de déduire l'existence de solutions faibles pour $(1a)$.