Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Avril 2022.
Eléments finis (Master1-EDP_S2)

Epreuve de contrôle continu
(1h50mn)

Questions de cours

K étant un compact connexe non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), Σ étant un ensemble fini de pts distincts de K : $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^N$ et P étant un espace vectoriel de fonctions $p : K \to \mathbb{R}$, alors ($\dim P < +\infty$)

1) Quant-est ce que Σ est dit P-unisolvant ? (1pt)
2) Quant-est ce que (K, P, Σ) est dit élément fini de Lagrange ? (1pt)

On voudrait montrer alors que le triplet (K, P, Σ) est un élément fini de Lagrange ssi la seule fonction de P qui s'annule sur $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^{N=\dim P}$ est, sans doute, la fonct. nulle.
On introduit alors l'application $\ell : P \to \mathbb{R}^N$
$p \mapsto \ell(p) = (p(a_1), \dots, p(a_N)) = (p(a_j))_{j=1}^N$

3) Montrer que ℓ est linéaire. (1pt)
4) Montrer que si (K, P, Σ) est un élément fini de Lagrange (c.à d. Σ est P-unisolvant) alors ℓ est injective. (1,5pts)
5) Montrer que si la seule fonction de P qui s'annule sur Σ est la fonction nulle alors Σ est P-unisolvant. (1pt)

Rappel 1 : $L : E$ ($\mathbb{R}$-esp. vect.) $\longrightarrow F$ ($\mathbb{R}$-esp. vect.) linéaire
L injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} L := \{x \in E / Lx = 0_F\} = \{0_E\} \Leftrightarrow (Lx = Ly \Rightarrow x = y \text{ qd } x, y \in E)$

Rappel 2 : Σ est P-unisolvant (c.à d. (K, P, Σ) est 1 élém. fini de Lagrange) ssi, par déf., $\forall$ la donnée de N scalaires réels d_i $(1 \le i \le N)$ $\exists!\, p \in P / p(a_i) = d_i$ $i = \overline{1, N}$.

Problème

Etant donné le problème de convection-diffusion stationnaire unidimensionnel adimensionné :

$$(1) \begin{cases} \dfrac{dC}{dx} - \beta \dfrac{d^2C}{dx^2} = 0 \text{ dans }]0,1[\\ C(0) = 1 \text{ et } C(1) = 0, \end{cases}$$

où $\beta > 0$ (coefficient de diffusivité)

a) Montrer que, par le changement d'inconnue svt via la tranformation affine suivante : $u(x) = C(x) + x - 1$, on peut ramener la résolution du problème (1) à la résolution d'un problème elliptiques avec conditions aux limites (de type Dirichlet) homogènes : (1pt)

$$(2) \begin{cases} \dfrac{du}{dx} - \beta' \dfrac{d^2u}{dx^2} = f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(Ici, il faut, tout simplement, montrer que la condition d'homogénéité des conditions aux limites du pb (2) est vérifiée)

b) Déterminer alors la fonction f et montrer que $f \in L^2(]0,1[)$.
Déterminer aussi le coefficient β' en fction de β. (1.5 pts)

c) Formulation variationnelle

On suppose alors que $f(x) = \gamma > 0 \ \forall x \in]0,1[$ ds (2)

c1) Ecrire la formulation variationnelle de (2) ds un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert V convenable (à préciser) en explicitant une forme bilinéaire "a" et une forme linéaire "L" t.q. $a(u,v) = L(v) \ \forall v \in V$ (On note cette dernière équation variationnelle par (2')). (2.5 pts)

c2) Montrer que (2') admet une solution unique notée $u \in V$. (4 pts)

Rappel: Si la forme bilinéaire "a" est continue sur $V \times V$, V elliptique et $L \in V'$ alors (2') admet une solution unique (Thm de Lax-Milgram).

c3) Peut-on ramener la résolution de (2') à la résolution d'un pb d'optimisation: $\min_{v \in V} \left(J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \right)$? Justifier la réponse donnée. (1 pt)

d) Approximation variationnelle

d1) Construire un sous-espace V_h de V de dimension finie N t.q. $h = 1/(N+1)$ dans lequel on cherchera u_h la solution unique du P.A.V.G.: (1 pt)

$$(2'_h): \ a(u_h, v) = L(v) \ \forall v \in V_h \quad (h = 1/(N+1) \ N \in \mathbb{N}^*)$$

d2) Déterminer les fonctions de base de V_h : $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ t.q. $\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j}$ où a_j est le $j^{ème}$ pt de subdivision de $[0,1]$ $j = 1, \dots, N$. (2 pts)

d3) Construire explicitement le système linéaire équivalent au P.A.V.G. $(2'_h)$. (1 pt)

d4) Montrer la façon de procéder pour retrouver la solution approchée C_h de C connaissant la solution approchée u_h de u. (0.5 pt)

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Avril 2022.
Eléments finis (Master1-EDP_S2)

Corrigé de l'épreuve de contrôle continu

Questions de Cours

1) Σ est dit P-unisolvant ssi $\forall$ la donnée de N scalaires réels α_i $(1 \leq i \leq N)$ $\exists! p \in P / p(a_i) = \alpha_i$ $i = \overline{1,N}$. (1pt

2) (K, P, Σ) est dit élément fini de Lagrange ssi Σ est P-unisolvant. (1pt

(K, P, Σ) élément fini de Lagrange $\Leftrightarrow$ La seule fonction de P qui s'annule sur Σ est la fonction nulle. $\mathcal{L} : P \longrightarrow \mathbb{R}^N$ t.q. $p \longmapsto \mathcal{L}(p) = (p(a_j))_{j=1}^{N = \mathrm{card}(\Sigma)}$

3) $P_1, P_2 \in P$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $\mathcal{L}(\alpha P_1 + P_2) = (\alpha P_1(a_j) + P_2(a_j))_{j=1}^{N} = \alpha (P_1(a_j))_{j=1}^{N} + (P_2(a_j))_{j=1}^{N}$ (1pt
$= \alpha \mathcal{L}(P_1) + \mathcal{L}(P_2)$

4) (K, P, Σ) étant un élément fini de Lagrange c.à d. $\Sigma = \{a_j\}_{j=1}^{N = \dim P}$ étant P-unisolvant alors $\mathcal{L}$ est injective puisque si P_α et P_β sont deux fonctions de P t.q. $\mathcal{L}(P_\alpha) = \mathcal{L}(P_\beta)$ c.à d. P_α et P_β coïncident sur Σ : $P_\alpha(a_i) = P_\beta(a_i)$ $i = \overline{1,N}$ alors $P_\alpha = P_\beta$ en vertu de la P-unisolvance de Σ. Ce qui prouve que $\mathcal{L}$ est injective. (1pt (0.5pt

5) La seule fonction de P qui s'annule sur Σ est la fction nulle : $p(a_i) = 0$ $\forall i = \overline{1,N} \Leftrightarrow p \equiv 0$ c.à d. $\mathcal{L}(p) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{N \text{ fois}}) \Leftrightarrow p = 0_P$. Donc $\mathrm{Ker}\,\mathcal{L} = \{0_P\} \Rightarrow \mathcal{L}$ injective et comme $\dim P = N = \dim \mathbb{R}^N$ alors $\mathcal{L}$ est bijective $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^N \exists! p \in P / \mathcal{L}(p) = x = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ (0.5pt
c.à d. $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ il existe une et une seule fonction $p \in P$ t.q. $p(a_j) = \alpha_j$ $j = \overline{1,N}$
$\Rightarrow \Sigma$ est P-unisolvant (par définition de base de la P-unisolvance). (0.5pt

Problème

a) $u(x) = C(x) + x - 1 \Rightarrow u(0) = C(0) + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ (0.5pt
et $u(1) = C(1) + 1 - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$ (0.5pt

b) $C(x) = u(x) - x + 1 \Rightarrow \dfrac{dC}{dx}(x) = \dfrac{du}{dx}(x) - 1$ et $\dfrac{d^2C}{dx^2}(x) = \dfrac{d^2u}{dx^2}(x)$

Par suite (1) devient, via cette transformation, (2) $\begin{cases} \dfrac{du}{dx} - \beta \dfrac{d^2u}{dx^2} = 1 & \text{ds }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

avec $f(x) = 1$ $\forall x \in]0,1[\Rightarrow \int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 dx = 1 < +\infty$ (1pt
$\Rightarrow f \in L^2(]0,1[)$ et $\beta' = \beta$. (0.5pt

c) Formulation variationnelle de (2) (0.5pt)

C1) On pose $V = H_0^1(]0,1[)$ et soit $v \in V$. On multiplie alors l'équation de (2) (avec $f(x) = \gamma$) par v et on intègre entre 0 et 1 (au départ on suppose $u \in H^2(]0,1[)$ et vérifiant (2)) :

$$-\beta' \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} v\, dx + \int_0^1 \frac{du}{dx} v\, dx = \gamma \int_0^1 v\, dx \Rightarrow \beta' \int_0^1 u'v'\, dx + \int_0^1 u'v\, dx = \gamma \int_0^1 v\, dx$$

$$-\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} v\, dx = -\left[\frac{du}{dx} v\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx = \int_0^1 u'v'\, dx \text{ car } v \in H_0^1(\Omega) \text{ où } \Omega =]0,1[$$

Donc (2) $\Longrightarrow$ (2'): Trouver $u \in H_0^1(]0,1[)$ t.q. $\forall v \in H_0^1(]0,1[)$ $a(u,v) = L(v)$ (2')

où $a(u,v) = \beta' \int_0^1 u'v'\, dx + \int_0^1 u'v\, dx$ (1pt) et $L(v) = \gamma \int_0^1 v\, dx$ (1pt)

C2) On montre que le pb (2') admet une solution unique. D'après le thm de Lax-Milgram, il suffit de m.q. "a" est continue sur $V \times V$, V-elliptique et que L est continue sur V ($L \in V'$) :

Continuité de "a" : $v, w \in V = H_0^1(]0,1[)$ $\|v\|_V = |v|_{H^1(0,1)} = \|v'\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 v'(x)^2\, dx\right)^{1/2}$

$$|a(v,w)| \leq \beta' \int_0^1 |v'|\cdot|w'|\, dx + \int_0^1 |v'|\,|w|\, dx \leq \beta' \underbrace{\|v'\|_{L^2(0,1)}}_{= \|v\|_{H_0^1(]0,1[)}} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)} + \|v'\|_{L^2} \cdot \|w\|_{L^2}$$

(1pt)

D'après l'inégalité de Poincaré : $\forall v \in V = H_0^1(0,1)$ $\|v\|_{L^2(0,1)} \leq C(0,1)\, \|v'\|_{L^2(0,1)}$

Donc $|a(v,w)| \leq \beta' \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)} + C(0,1)\, \|v'\|_{L^2(0,1)} \cdot \|w'\|_{L^2(0,1)}$.

Par suite, on peut écrire : $\forall v, w \in V$ $|a(v,w)| \leq M_a \cdot \|v\|_V \cdot \|w\|_V$ (1pt)

où $M_a = \beta' + C(0,1)$ est la constante de continuité de "a" et $\|v\|_V = \|v'\|_{L^2}$

V-ellipticité de "a" : $a(v,v) = \beta' \int_0^1 (v'(x))^2\, dx + \int_0^1 v'v\, dx$ où $v \in H_0^1(0,1)$

Mais $\int_0^1 v'v\, dx = v^2(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 vv'\, dx = v^2(1) - v^2(0) - \int_0^1 v'v\, dx = -\int_0^1 v'v\, dx$

$\Rightarrow 2\int_0^1 v'v\, dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 v'v\, dx = 0$ car $v(0) = v(1) = 0$ ($v \in H_0^1(0,1)$)

Donc $a(v,v) = \beta' \|v'\|^2_{L^2(0,1)} = \beta' \|v\|_V^2$ Donc $\forall v \in V$ $a(v,v) \geq \beta' \|v\|_V^2$ (1pt)

et par suite "a" est V-elliptique et β' est la constante de V-ellipt. de "a".

Continuité de "L" : $\forall v \in V = H_0^1(0,1)$ $|L(v)| \leq \gamma \int_0^1 |v|\, dx \leq \gamma \|1\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v\|_{L^2}$

où $\|1\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 1^2\, dx\right)^{1/2} = \sqrt{1-0} = 1$ et Poincaré $\Rightarrow \|v\|_{L^2} \leq C(0,1)\, \|v'\|_{L^2}$

Donc $|L(v)| \leq \gamma\, C(0,1)\, \|v\|_{V = H_0^1(0,1)}$ $\forall v \in V \Rightarrow L$ cont. sur V avec $C_L = \gamma\, C(0,1)$ constante de cont. de L. (1pt)

C3) Non car la forme bilinéaire "a" n'est pas symétrique. (1pt)

d) Approximation variationnelle

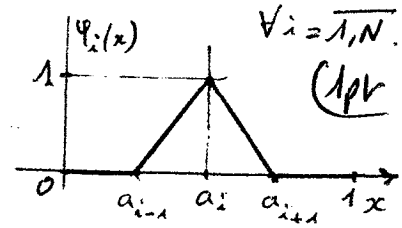
d1) Soit V_h un s/esp. de V de dimension finie. On pourra construire V_h comme un esp. de fonctions continues t.q. leurs restrictions aux sous-intervalles de subdivision de $[0,1]$ de longueur h est une fonction polynômiale de degré ≤ 1 : $V_h := \{v \in \mathcal{C}([0,1]) / v|_{[\ell h,(\ell+1)h]} \in P_1 \ \forall \ell = 0,\dots,N \ ; \ v(0)=v(1)=0\}$

$\dim V_h = N$ dans la mesure où l'on définit pour V_h N fonctions de base φ_i $(i=\overline{1,N})$ vérifiant $\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0 \ \forall i=1,\dots,N$. (1pt)

d2) Il y a N fonctions de base de V_h : φ_i $(1 \leq i \leq N)$ t.q. $\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j}$ $1 \leq i,j \leq N$.
avec $a_j = jh$ $(j=\overline{1,N})$. Ce sont les nœuds intérieurs à $]0,1[$ $\nexists$ $a_0=0$ et $a_{N+1}=1$.
$\forall i=\overline{1,N}$ $\varphi_i \in V_h \Rightarrow \varphi_i \in \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi_i|_{K_\ell} \in P_1$ où $K_\ell = [\ell h,(\ell+1)h]$ $(\ell=\overline{0,N})$ et $\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0$ $\forall i=\overline{1,N}$.
Une telle fction s'écrit certainement sous la forme :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1+\frac{x-a_i}{h} & \text{sur } [a_{i-1},a_i] \\ 1-\frac{x-a_i}{h} & \text{sur } [a_i,a_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1-\frac{|x-a_i|}{h} & \text{si } x \in [a_{i-1},a_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$i=1,\dots,N$ (1pt)



(1pt)

d3) Si u_h désigne la solution approchée de u du P.V.G. (2') alors u_h est l'unique solution du P.A.V.G. $(2'_h)$: $a(u_h,v)=L(v)$ $\forall v \in V_h$.
u_h s'écrit alors comme combinaison linéaire des fonctions de base de V_h : $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_h(a_i)\varphi_i$ où $u_h(a_i)$ $(i=\overline{1,N})$ sont les valeurs de u_h au nœud a_i $i=1,\dots,N$ et sont solutions du système linéaire :

$$\sum_{i=1}^{N} a(\varphi_i,\varphi_j)\,u_h(a_i) = L(\varphi_j) \quad j=1,\dots,N.$$ (0,5pt)

c.à d. $$\sum_{i=1}^{N}\left(\beta'\int_0^1 \varphi_i'\varphi_j'\,dx + \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j\,dx\right)u_i = \gamma\int_0^1 \varphi_j(x)\,dx \quad j=\overline{1,N}.$$

où $u_i = u_h(a_i)$ $i=1,\dots,N$. (0,5pt)

d4) Pour retrouver la solution approchée C_h de C connaissant u_h, on réécrit C en fonction de u : $C(x)=u(x)-x+1$. Il est donc évident que $C_h(a_i)=u_h(a_i)-a_i+1=u_h(a_i)-ih+1$ $i=\overline{1,N}$.
et $C_h(x)=u_h(x)-x+1=\sum_{i=1}^{N} u_h(a_i)\varphi_i(x)-x+1$. (0.5pt)