Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Janvier 2022.
Analyse d'images.
(Master1-EDP_S1) (2 heures)

Epreuve finale

1) <u>T.F.D. à 2 dimensions</u> : On rappelle qu'en dimension une, la T.F.D. d'une suite finie de valeurs réelles numériques $x(n)$ $(n=\overline{0,N-1})$ est donnée par $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)w^{nk}$ $k=0,\dots,N-1$ où $w=e^{-2i\pi/N}$

Sous forme vectorielle, on écrit $X=Wx$ avec $W(i,j)=w^{i.j}$ $0\leq i,j\leq N-1$ où $X=(X(0),\dots,X(N-1))^T$ et $x=(x(0),\dots,x(N-1))^T$

$$W=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix}=\left(w^{n.k}\right)_{0\leq n,k\leq N-1}$$

<u>Rem.</u> W est une matrice complexe et symétrique.

<u>1a)</u> La matrice W étant orthogonale en ligne (c.à d. $\exists D_W=NI_N$ t.q. $W.W^*=D_W$) et orthogonale en colonne (c.à d. $\exists D_W=NI_N$ / $W^*W=D_W$), montrer alors que $W^{-1}=\frac{1}{N}W^*$ où $W^*=\overline{W}^T=\overline{W^T}=\overline{W}$ car W sym. (2pts)

<u>1b)</u> Déterminer la forme vectorielle de la T.F.D. inverse c.à d. t.q.
$$x=(x(0),\dots,x(N-1))^T=T.F.D.^{-1}(X)=T.F.D.^{-1}\left((X(0),\dots,X(N-1))^T\right)$$ (2pts)

<u>1c)</u> En dimension 2, on écrit $F(k,l)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} f(n,m)w^{kn+lm}$ $k,l=0,\dots,N-1$.

<u>1c1)</u> Montrer que l'opérateur de transformation de Fourier discrète (T.F.D.) qui à $f \xrightarrow{T.F.D.} F$ est un opérateur linéaire séparable où $H_c(k,n)=w^{k.n}$ et $H_L(l,m)=w^{l.m}$ pour $0\leq k,l,m,n\leq N-1$. (2pts)

<u>1c2)</u> Ecrire alors la forme matricielle de la T.F.D. en dim. 2 en exprimant $\underline{\underline{F}}:=(F(k,l))_{0\leq k,l\leq N-1}$ en fonction de $\underline{\underline{f}}:=(f(n,m))_{0\leq n,m\leq N-1}$ (2pts)

<u>1c3)</u> En déduire la $T.F.D^{-1}$ sous forme matricielle : $\underline{\underline{f}}=T.F.D^{-1}(\underline{\underline{F}})$ (1.5pts)

2) <u>Produit de corrélation entre 2 signaux</u> :

<u>2a)</u> Montrer que le produit de corrélation entre deux signaux réels discrétisés (en 1D) f et h admet comme T.F.D. le produit de la T.F.D. de h par le conjugué de la T.F.D. de f : $T.F.D.(f\circledast h(n))(k)=\overline{F(k)}\,H(k)$ $k=\overline{0,N-1}$

où $(f\circledast h)(n)=\sum_{i=0}^{N-1} f(i)\,h([i+n]_N)$ $F(k)=T.F.D.\left((f(i))_{i=0}^{N-1}\right)(k)$

et $H(k)=T.F.D.\left((h(i))_{i=0}^{N-1}\right)(k)$ (2pts)

<u>Rappel</u> : $[l]_N=[i+n]_N \Leftrightarrow \exists s\in\mathbb{Z} / l=i+n+sN \Leftrightarrow l\equiv i+n \pmod N$

2b) Passer en dimension 2 (images) et écrire seulement la formule de la question 2a) en dim. 2. (1pt)

3) Opérateurs de dérivation discrétisés pour les images et la T.F.D.

3.a) On définit l'opérateur de dérivation discrétisé dans la direction des indices de lignes ($i=0,\dots,N-1$) par $DA(i,j)=A(i,j)-A(i-1,j)$. Calculer alors sa T.F.D. bidimensionnelle (2D) en utilisant la propriété de translation spatiale : $f(n-n_0, m-m_0) \xrightarrow{T.F.D\,(2D)} W^{kn_0+\ell m_0} F(k,\ell)$ où $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$ et $n=n_0,\dots,n_0+N-1$, $m=m_0,\dots,m_0+N-1$, $0\le k,\ell\le N-1$ (1pt)

3.b) Dans le cas continu, on définit l'opérateur de divergence d'une fction f ($\mathcal{C}^1$) à deux variables x et y par : $\operatorname{div} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

3.b1) Proposer une définition convenable pour l'opérateur de divergence discrétisé pour les images que l'on notera $\operatorname{Div} A(i,j)$ $i,j=0,\dots,N-1$ (1pt)

3.b2) Calculer sa T.F.D. bidimensionnelle (2D). (1pt)

4) Propriété de parité pour la T.F.D.

On définit la parité pour une suite finie de valeurs réelles $(x(n))_{n=0}^{N-1}$ après avoir défini sa suite symétrique à l'aide de la matrice de permutation :

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{t.q. } \Pi\,(x(n))_{n=0}^{N-1} = \Pi \begin{bmatrix} x(0) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \left[x(N-n)\right]_{n=0}^{N-1} = \begin{bmatrix} x(N) \\ \vdots \\ x(1) \end{bmatrix} \quad \left(x(N)=x(0) \text{ car } N\equiv 0 \pmod N\right)$$

On a alors les deux définitions suivantes :

$x=(x(n))_{n=0}^{N-1}$ est une suite paire $\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} x = \Pi x$

$x=(x(n))_{n=0}^{N-1}$ est une suite impaire $\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} x = -\Pi x$

4a) Montrer que toute suite numérique finie $x=(x(n))_{n=0}^{N-1}$ ($\subset \mathbb{R}^N$) peut se mettre sous la forme $x = x_e + x_o$ avec $x_e = (x_e(n))_{n=0}^{N-1}$ paire et $x_o = (x_o(n))_{n=0}^{N-1}$ impaire où $x_e = \frac{1}{2}(x+\Pi x)$ et $x_o = \frac{1}{2}(x-\Pi x)$. Il faut, bien sûr, vérifier que x_e est paire et que x_o est impaire.

$x = x_e + x_o$ (0.5pt) (2.5pts)
x_e paire (1pt) et x_o impaire (1pt)

Rappel : $\Pi^2 = I_N \Leftrightarrow \Pi^2 x = x \ \forall x \in \mathbb{R}^N$

4b) Montrer que la T.F.D. de x_e est une suite réelle paire notée $X_e = (X_e(k))_{k=0}^{N-1}$ et que la T.F.D. de x_o est une suite imaginaire pure impaire notée $X_o = (X_o(k))_{k=0}^{N-1}$. (2pts)

Rappels : $z \in \mathbb{C}$ alors $(z = \bar z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R})$ et $(z = -\bar z \Leftrightarrow z = iy,\ y \in \mathbb{R}$ et $x=0)$

$z = x = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ et $y = \operatorname{Im}(z) = 0$ où $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im}(z)$

On rappelle aussi que $W^2 = N\Pi$ et $\Pi^2 = I_N \Rightarrow W^4 = N^2 I_N$.

On a également : $W^3 = N W^*$ où $W^* = \overline{W}^T = \overline{W}$ car W sym.

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Janvier 2022.
Analyse d'images. (Master1-EDP_S1)

Corrigé de l'épreuve finale

1) T.F.D. en 2D

En 1D, sous forme vectorielle, on écrit la T.F.D. de $x = (x(n))_{n=0}^{N-1}$ comme $X = Wx$ où $X = (X(k))_{k=0}^{N-1}$

1a) $WW^* = NI_N = W^*W \iff \frac{1}{N} WW^* = W\left(\frac{1}{N}W^*\right) = I_N = \left(\frac{1}{N}W^*\right)W$

D'où, par déf. de la matrice inverse, $W^{-1} = \frac{1}{N}W^*$ (2pts)

1b) Puisque $X = Wx$ alors $x = W^{-1}X$ (1pt) d'où le résultat : $x = \frac{1}{N}W^*X$ (1pt)

1c) En 2D, la T.F.D. (comme transformation ponctuelle) s'écrit comme suit :

$$F(k,\ell) = \sum_{n,m=0}^{N-1} f(n,m)\, w^{kn+\ell m} \quad k,\ell = 0,\dots,N-1.$$

1c1) On rappelle ici l'écriture de l'expression d'une transformation ponctuelle correspondant à 1 opérateur appliqué à 1 image A pour obtenir en sortie l'image B : $B(i,j) = \sum_{k,\ell=0}^{N-1} A(k,\ell)\, H(i,j,k,\ell)$ $\quad 0 \le i,j \le N-1$

Cet opérateur est dit séparable si on peut écrire : $H(i,j,k,\ell) = H_c(i,k)\cdot H_L(j,\ell)$ $\quad 0 \le i,j,k,\ell \le N-1$ (1pt)

Concernant la T.F.D. bidimensionnelle, on a $i \leftarrow k$, $j \leftarrow \ell$, $k \leftarrow n$ et $\ell \leftarrow m$.

$B(i,j) \leftarrow F(k,\ell)$ et $A(k,\ell) \leftarrow f(n,m)$

$$F(k,\ell) = \sum_{n,m=0}^{N-1} f(n,m)\, H_c(k,n)\, H_L(\ell,m)$$

où $H_c(k,n) = w^{kn}$ et $H_L(\ell,m) = w^{\ell m}$ (1pt)

1c2) La T.F.D. en 2D étant 1 opérateur séparable, s'écrit sous forme matricielle $\left(B = H_c A H_L^T\right)$: $\underline{\underline{F}} = H_c \underline{\underline{f}} H_L^T = W \underline{\underline{f}} W^T = W \underline{\underline{f}} W$ (W sym.) (2pts)

puisque $H_c(k,n) = w^{kn}$ $\forall k,n = 0,\dots,N-1$

et $H_L(\ell,m) = w^{\ell m}$ $\forall \ell,m = 0,\dots,N-1$

1c3) En déduire la T.F.D.$^{-1}$ en 2D sous forme matricielle :

$$\underline{\underline{F}} = W\underline{\underline{f}}W \Rightarrow W^*\underline{\underline{F}}W^* = W^*W\underline{\underline{f}}WW^* = NI_N\underline{\underline{f}}(NI_N) = N^2\underline{\underline{f}}$$ (1pt)

$$\Rightarrow \underline{\underline{f}} = \frac{1}{N^2}W^*\underline{\underline{F}}W^*$$

$$= (1/N^2)\,\overline{W}\,\underline{\underline{F}}\,\overline{W} \quad \text{car } W^* = \overline{W}^T = \overline{W^T} = \overline{W} \text{ car } W \text{ sym.}$$

(0,5pt) et $\overline{W}(i,j) = \overline{w^{i.j}} = w^{-i.j}$

2) Produit de corrélation

2a) On montre ici que $\text{T.F.D.}\left((f \circledast h)(n)\right)(k) = \overline{F(k)}\,H(k) \quad k = 0, \dots, N-1$

où $(f \circledast h)(n) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i)\, h\left([i+n]_N\right)$.

Montrer une telle T.F.D. revient à m.q. $\sum_{i=0}^{N-1} f(i)\, h\left([i+n]_N\right) = \text{T.F.D.}^{-1}\left(\overline{F(k)}\,H(k)\right)(n)$

Or par déf. de la T.F.D.^{-1} (1D): $\text{T.F.D.}^{-1}\left(\overline{F(k)}\,H(k)\right)(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \overline{F(k)}\,H(k)\,w^{-nk}$ $\quad n = \overline{0, N-1}$

et puisque $H(k) = \sum_{p=0}^{N-1} h(p)\, w^{pk}$ et $\overline{F(k)} = \overline{\sum_{m=0}^{N-1} f(m) w^{mk}}$

$= \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\, w^{-mk}$ (0.5pt)

on peut donc écrire

$$\text{TFD}^{-1}\left(\overline{F(k)}\,H(k)\right)(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} f(m) w^{-mk}\right)\left(\sum_{p=0}^{N-1} h(p) w^{pk}\right) w^{-nk} \quad n = \overline{0, N-1}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{p=0}^{N-1} f(m) w^{-mk} h(p) w^{pk} w^{-nk} = \frac{1}{N}\sum_{m,p=0}^{N-1} f(m) h(p) \sum_{k=0}^{N-1} w^{(p-m-n)k}.$$ (0.5pt)

Mais $\sum_{k=0}^{N-1} w^{(p-m-n)k} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{-2i\frac{\pi}{N}(p-m-n)}\right)^k = \begin{cases} N & \text{si } p-m \equiv n \pmod N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} := \alpha(p,m,n)$

c.à.d. $\sum_{k=0}^{N-1} w^{(p-m-n)k} = \begin{cases} N & \text{si } p \equiv m+n \pmod N \Leftrightarrow [p]_N = [m+n]_N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (0.5pt)

D'où l'écriture $\text{T.F.D.}^{-1}\left(\overline{F(k)}.H(k)\right)(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m)\, h\left([m+n]_N\right) = (f \circledast h)(n)$ $(*)$

$n = \overline{0, N-1}$

puisque la somme $\sum_{p=0}^{N-1} h(p)\,\alpha(p,m,n) = 0$ chaque fois que $p \not\equiv m+n \pmod N$, (0.5pt)

c.à.d. $[p]_N \neq [m+n]_N$.

On retrouve alors le résultat recherché en appliquant aux 2 membres de l'égalité $(*)$ la T.F.D. (directe).

2b) $\text{T.F.D.}\left((f \circledast h)(n,m)\right)(k,\ell) = F(k,\ell)^* . H(k,\ell) \quad k,\ell = 0, \dots, N-1.$ (1pt)

où $F(k,\ell)^* = \overline{F(\ell,k)}$ et $(f \circledast h)(n,m) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} f(i,j)\, h\left([i+n]_N, [j+m]_N\right)$.

3) Opérateurs de dérivation discrétisés

3a) $\text{T.F.D}\left(DA(i,j)\right)(k,\ell) = \text{T.F.D.}\left(A(i,j)\right)(k,\ell) - \text{T.F.D.}\left(A(i-1,j)\right)(k,\ell)$ (0.5pt)

$= (1-w^k)\,B(k,\ell) = B(k,\ell) - w^k B(k,\ell)$ où $B(k,\ell) := \text{TFD}\left(A(i,j)\right)(k,\ell)$

$n_0 = 1$ et $m_0 = 0$

$i = n_0, \dots, n_0+N-1 = 1, \dots, N$, (0.5pt)

$j = 0, \dots, N-1 = k, \ell$

3b) **3b1)** $\text{DivA}(i,j) = A(i,j) - A(i-1,j) + A(i,j) - A(i,j-1)$ (1pt)

$= 2A(i,j) - A(i-1,j) - A(i,j-1)$.

3b2) $\text{T.F.D.}\left(\text{DivA}(i,j)\right)(k,\ell) = 2\,\text{TFD}\left(A(i,j)\right)(k,\ell) - \text{TFD}\left(A(i-1,j)\right)(k,\ell)$ (0.5pt)

$- \text{TFD}\left(A(i,j-1)\right)(k,\ell)$

D'après 3a):

$\text{TFD}\left(A(i-1,j)\right)(k,\ell) = w^k B(k,\ell)$ où $B(k,\ell) := \text{T.F.D.}\left(A(i,j)\right)(k,\ell)$

$\text{TFD}\left(A(i,j-1)\right)(k,\ell) = w^\ell B(k,\ell)$ avec, ici, $n_0 = 0$ et $m_0 = 1$ $j = m_0, \dots, m_0+N-1$

et $i,k,\ell = 0, \dots, N-1$

D'où le résultat final:

$$\text{T.F.D.}\left(\text{DivA}(i,j)\right)(k,\ell) = 2B(k,\ell) - w^k B(k,\ell) - w^\ell B(k,\ell) = (2 - w^k - w^\ell)\,B(k,\ell)$$

(0.75pt) $\quad k,\ell = \overline{0, N-1}$.

4) $(x(n))_{n=0}^{N-1}$ est paire $\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow}$ $x = \Pi x$ et $(x(n))_{n=0}^{N-1}$ est impaire $\overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow}$ $x = -\Pi x$

4a) $x_e = \frac{1}{2}(x + \Pi x)$ est paire puisque $\Pi x_e = \frac{1}{2}\Pi x + \frac{1}{2}\Pi^2 x = \frac{1}{2}(I_N x + \Pi x)$

$= \frac{1}{2}(x + \Pi x) = x_e$ $(\Pi^2 = I_N)$ 1pt

$x_o = \frac{1}{2}(x - \Pi x)$ est impaire

puisque $\Pi x_o = \frac{1}{2}\Pi x - \frac{1}{2}\Pi^2 x = \frac{1}{2}(-I_N x + \Pi x) = \frac{1}{2}(-x + \Pi x)$

$= \frac{1}{2}(\Pi x - x) = -\frac{1}{2}(x - \Pi x) = -x_o \Leftrightarrow x_o = -\Pi x_o$ 1pt

$x_e + x_o = \frac{1}{2}(x + \Pi x) + \frac{1}{2}(x - \Pi x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = x$. 0.5pt

4b) On montre ici la T.F.D.(x_e) est une suite réelle paire c.à.d. si $X_e = $ T.F.D.(x_e) alors $X_e = (X_e(k))_{k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N$ et $\Pi X_e = X_e$.
On montre aussi que la T.F.D. (x_o) est une suite imaginaire pure et impaire : $X_o = $ T.F.D.$(x_o) = (X_o(k))_{k=0}^{N-1} \in i\mathbb{R}^N$ et $X_o = -\Pi X_o$.

→ $X_e = $ T.F.D.(x_e) réelle paire ?

(*) Pour montrer que X_e est 1 vecteur réel $(X_e \in \mathbb{R}^N)$, il suffit de montrer que $\overline{X_e} = X_e = $ T.F.D.(x_e)

D'après la question 1) $X_e = W x_e$ puisque $X_e(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_e(n) w^{nk}$ $k = \overline{0, N-1}$

avec $x_e(n) \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$

et $W = (w^{nk})_{0 \le n,k \le N-1}$ (W sym.)

$\Rightarrow W^* = \overline{W} = (w^{-nk})_{0 \le n,k \le N-1}$

Ce qui entraîne que :

$\overline{X_e(k)} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} x_e(n) w^{nk}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_e(n) w^{-nk}$ $k = \overline{0, N-1}$

sachant que $w^m = e^{-2i\frac{\pi}{N}m}$

$\Rightarrow \overline{w^m} = \overline{e^{-2i\frac{\pi}{N}m}} = e^{2i\frac{\pi}{N}m} = w^{-m}$

Donc, on peut écrire : $W^* = \overline{W}^T = \overline{W}$ car W sym.

$\overline{X_e} = \overline{W x_e} = \overline{W} x_e = W^* x_e$

$= \frac{1}{N} W^3 x_e = \frac{1}{N} W W^2 x_e$ (d'après 4.3)

$\underset{4.1)}{=} W\left(\frac{1}{N} N \Pi\right) x_e = W \Pi x_e \underset{x_e \text{ paire}}{=} W x_e = X_e$

Donc $\overline{X_e} = X_e \Rightarrow X_e \in \mathbb{R}^N$. 0.5pt

(*) Pour montrer que X_e est paire, il suffit de montrer que $\Pi X_e = X_e$:

$\Pi X_e = \Pi W x_e \underset{4.1)}{=} \frac{1}{N} W^2 W x_e = W \underbrace{\left(\frac{1}{N} W^2\right)}_{\Pi} x_e = W \Pi x_e \underset{x_e \text{ paire}}{=} W x_e = X_e$ 0.5pt

D'où la parité de X_e.

$\rightarrow X_0 = T.F.D.(x_0)$ imaginaire pure impaire?

(*) Pour montrer que X_0 est 1 vecteur complexe imaginaire pur ($X_0 \in i\mathbb{R}^N$), il suffit de montrer que $\overline{X_0} = -X_0 = -T.F.D.(x_0)$

D'après la question 1) $X_0 = Wx_0 \Leftrightarrow (X_0(0), \dots, X_0(N-1))^T = W(x_0(0), \dots, x_0(N-1))^T$.

$$\overline{X_0} = \overline{W}x_0 = W^* x_0 \underset{\underset{4.3)}{\wedge}}{=} \frac{1}{N} W^3 x_0 = \frac{1}{N} W W^2 x_0 \underset{\underset{4.1)}{\wedge}}{=} \frac{1}{N} W (N \underbrace{\Pi) x_0}_{\Pi x_0 = -x_0 \ (x_0 \text{ impaire})} \underset{\wedge}{=} -Wx_0 = -X_0$$

$$\overline{X_0} = -X_0 \Rightarrow X_0 = T.F.D.(x_0) \in i\mathbb{R}^N$$

0.5pt

(*) Pour montrer que X_0 est impaire il suffit de montrer que $\Pi X_0 = -X_0$

$$\Pi X_0 = \Pi W x_0 \underset{\underset{4.1)}{\wedge}}{=} N^{-1} W^2 W x_0 = \frac{1}{N} W \underbrace{N\Pi}_{=W^2} x_0 = W \Pi x_0 \underset{\underset{x_0 \text{ impaire}}{\wedge}}{=} -Wx_0 = -X_0$$

Donc $\Pi X_0 = -X_0 \Rightarrow X_0$ impaire.

0.5pt