

Faculté des Sciences
Dept. Mathématiques
Tlemcen

Epreuve finale de Calcul différentiel et intégral

Exercice1(sur 6 points)

Soit $f : R^n \rightarrow L(R^n, R^n)$ une application différentiable, telle que $f(0)$ est inversible, $g : R^n \rightarrow R^n$ définie par

$$g(x) = f(x)(x).$$

1) Montrer que g est différentiable en tout point $x \in R^n$ et calculer sa différentielle.

2) Montrer qu'il existe un ouvert $U \subset R^n$ contenant 0 tel que $g : U \rightarrow g(U)$ est un difféomorphisme.

Exercice2 (sur 6 points)

Démontrer que la relation

$$x + y + z + \sin(xyz) = 0$$

définit z comme fonction de x et de y au voisinage du point $(0, 0, 0)$.
Calculer alors $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ au voisinage de ce point.

Exercice3 (8 points)

1-Montrer que pour tout $y > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y}(1+y)}.$$

2-Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx \right) dy = \frac{\pi^2}{2}.$$

3-Montrer que pour $x > 0$, $x \neq 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy = \frac{2 \ln x}{x^2 - 1}.$$

En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 \ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Corrections

Exercice 1

Pour $x, h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= f(x+h)(x+h) - f(x)(x) \\ &= f(x+h)(x) - f(x)(x) + f(x+h)(h) \quad \text{car } f(x) \text{ est linéaire} \\ &= (f(x+h) - f(x))(x) + f(x+h)(h). \end{aligned}$$

Puisque f est différentiable alors on peut écrire

$$f(x+h) - f(x) = Df(x)(h) + o(h)$$

et en remplaçant dans ce qui précède

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= (Df(x)(h) + o(h))(x) + (Df(x)(h) + o(h))(h) \\ &= Df(x)(h)(x) + o(h)(x) + (f(x) + Df(x)(h) + o(h))(h) \\ &= Df(x)(h)(x) + f(x)(h) + o(h)(x) + (Df(x)(h) + o(h))(h) \end{aligned}$$

Or

$$\|o(h)(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|o(h)\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|x\|_{\mathbb{R}^n}$$

de même

$$\begin{aligned} \|(Df(x)(h) + o(h))(h)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \|Df(x)(h) + o(h)\|_{L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \|h\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \|Df(x)\|_{L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))} \|h\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|o(h)\| \|h\|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{qui est un } o(h). \end{aligned}$$

Par conséquent g est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et on a

$$Dg(x)(h) = Df(x)(h)(x) + f(x)(h)$$

i.e

$$Dg(x)(h) = Df(x)(h)(x) + f(x)(h)$$

Ce qui donne pour $x = 0$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} Dg(0)(h) &= Df(0)(h)(0) + f(0)(h) \\ &= f(0)(h) \end{aligned}$$

D'où

$$Dg(0) = f(0) .$$

Puisque $f(0)$ est inversible il en résulte que $Dg(0)$ est inversible et par le théorème de l'inversion locale on déduit l'existence d'un ouvert $U \ni 0$ tel que $f : U \rightarrow f(U)$ soit un difféomorphisme.

Exercice2

Considérons $f(x, y, z) = x + y + z + \sin(xyz)$ qui est évidemment de classe C^∞ et vérifie $f(0, 0, 0) = 0$. De plus

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 1 + xy \cos(xyz)$$

en particulier

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 1 \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicite permet l'existence d'un voisinage ouvert $V \ni (0, 0)$ dans R^2 , d'un intervalle ouvert $I \ni 0$ dans R et d'une fonction $\varphi : V \rightarrow I$ de classe C^∞ telle que pour tous $(x, y) \in V$, $z \in I$

$$z = \varphi(x, y) \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0.$$

En particulier on obtient par différentiation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

et de plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 1$$

D'où

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0)} = -1 \text{ et } \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0)} = -1.$$

Exercice3

Considérons la fonction $R^+ \times R^+ \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \in R^+$ qui est continue et par conséquent Lebesgue mesurable et puisqu'elle est à valeurs positives le Théorème de Tonelli s'applique.

1) Calculons

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx &= \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{y} dx}{1+(x\sqrt{y})^2} \\ &= \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}} [\arctan(x\sqrt{y})]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

2) On obtient alors

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dx \right) dy \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} \\
&= \pi \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)} \\
&= \pi [\arctan u]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

3) Pour $x > 0$, $x \neq 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y} - \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dy}{1+x^2y} \\
&= \frac{1}{1-x^2} \left[\ln \frac{1+y}{1+x^2y} \right]_0^{+\infty} = \frac{2 \ln x}{x^2-1}.
\end{aligned}$$

Maintenant et puisque la fonction $f(x, y)$ satisfait les conditions du théorème de Tonneli, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2 \ln x}{x^2-1} dx
\end{aligned}$$

i.e

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 \ln x}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$