Université Abou-Beker Belkaid
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitiare 2021-2022.
Master EDP 1

Epreuve Partielle: Espaces fonctionnels

Exercice 1. 19

1- On utilisant le Théorème des accroissement fini, Trouver les limites suivantes (au sens des distributions):

i- $T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{-1}{n}})$.
ii- $S_n = n^2(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{\frac{-1}{n}} - 2\delta_0)$.
(δ_{x_0} est la distribution de Direc en $x_0 \in \mathbb{R}$).

2-Soit $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définie par $f_n(x) = n$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $f_n(x) = 0$ si $x \notin [0, \frac{1}{n}]$. Soit T_n la distribution régulière associée à f_n.
i-Tracer f_n et montrer que $f_n \in L^1(\mathbb{R})$.
Étudier la convergence de la suite des distribution $\{T_n\}_n$.
3-Soit la fonction $f(x) = |x|$.
1- Montrer que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
2-f est-elle dérivable en $x_0 = 0$?
3-Soit T_f la distribution régulière associe a f. Calculer T'_f et T''_f au sens des distributions. 9
On dénote par $Sign(x)$ la fonction définie par

$$\begin{cases} Sign(x) &= 1 \text{ si } x > 0 \\ Sign(x) &= -1 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 2. 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donné. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note par $\tau_a f$ la fonction définie par $\tau_a(f)(x) = f(x-a)$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On note $\tau_a T$ la forme me linéaire définie par $\tau_a T(\phi) = T(\tau_{-a}\phi)$.

1. Montrer que $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Si $T = T_f$(la distribution régulière associé a $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$). Calculer $\tau_a T_f$.

On dira que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est $a-$périodique si $\tau_a T = T$. On considere la distribution P définie par

$$P = \sum_{j\in Z} \delta_j, \ \delta_j \text{ est la distribution de Dirac au point } j \in Z.$$

3- Montrer que P est une distribution périodique de période 1.
4-Soit $L = \sum_{j\in Z} X_{[j,j+1]}$. Montrer que $L' = P$ au sens des distribution.

Ex 1 :

1 - $T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $T_n(\varphi) = n(\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(-\frac{1}{n}))$

$= n(\frac{1}{n} + \frac{1}{n})\varphi'(c_n)$

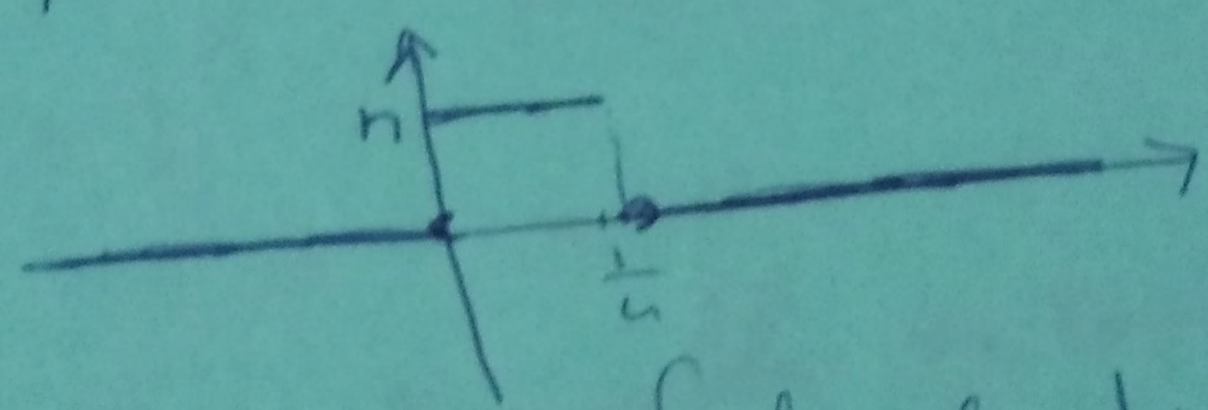
$(c_n \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$

Donc $|c_n| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow T_n(\varphi) \longrightarrow 2\varphi'(0)$ pour $n \to +\infty$

$\Rightarrow T_n \longrightarrow 2\delta'$ au sens des distributions

II $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$



$T_n = T_{f_n} \Rightarrow T_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx$

$= \int_0^{\frac{1}{n}} n\varphi(x)\,dx$

Soit $y = nx$ $\Rightarrow T_n(\varphi) = \int_0^1 \varphi(\frac{y}{n})\,dy$

Or $|\frac{y}{n}| \leq \frac{1}{n} \leq 1$

φ continue sur $\mathbb{R}$ a supp-compact

et $\left\{ \begin{array}{l} |\varphi(\frac{y}{n})| \leq \|\varphi\|_\infty \in L^1(0,1) \\ \varphi(\frac{y}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0) \text{ pour } y \in [0,1) \end{array} \right.$

par le Th. convergence dominé

$$\Rightarrow \int_0^1 \varphi(\tfrac{y}{n})\,dy \longrightarrow \varphi(0)$$

$$\Rightarrow T_n(\varphi) \longrightarrow \varphi(0) = \delta(0)$$

$$\Rightarrow T_n \longrightarrow \delta \text{ ds } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

③ $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$

f continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$T_f'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} |x|\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\int_0^\infty x\varphi'(x) + \int_{-\infty}^0 x\varphi'(x)$$

$$= \int_0^\infty \varphi(x)\,dx - \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Sign}(x)\,\varphi(x)$$

$$T_f''(\varphi) = -T_f'(\varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx$$

$$= 2\varphi(0) = 2\delta(0)$$

$$\Rightarrow T'' = 2\delta$$

<u>ex</u>: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad (\tau_a f)(x) = f(x-a)$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$(\tau_a T) = S$

$(\tau_a T)(\varphi) = T(\tau_{-a}\varphi)$: $\tau_{-a}(\varphi)(x) = \varphi(x+a)$

$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall K$ compact $\subset \mathbb{R}$, $\exists m(K), \exists C(K)$ tq

1- Si $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{Supp}\varphi \subset K$,

$$|T(\varphi)| \leq C(K)\, |||\varphi|||^{m(K)}$$

Soit K_1 compact, $K_2 = K + a$, compact

Donc si $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$: $\operatorname{Supp}\varphi \subset K_1 \Rightarrow \operatorname{Supp}\tau_{-a}\varphi \subset K_2$

$$\Rightarrow |(\tau_a T)(\varphi)| = |T(\tau_{-a}\varphi)| \leq C(K_2)\, |||\tau_{-a}\varphi|||^{m(K_2)}$$

$$\leq C(K_1, a)\, |||\varphi|||^{m(K_1)}$$

$$\Rightarrow \tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

2- Si $T_f = T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$

$$(\tau_a T_f)(\varphi) = T(\tau_a \varphi) = \int f(x)(\tau_a \varphi)(x)\,dx$$

$$= \int f(x)\varphi(x-a)\,dx = \int f(y+a)\varphi(y)\,dy$$

$$= T_{\tau_{-a} f}(\varphi)$$

$$\Rightarrow \tau_a T_f = T_{\tau_{-a} f}$$

3- $P = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j \Rightarrow P(\varphi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(j)$

$$(\tau_1 P)(\varphi) = P(\tau_{-1}\varphi) \Rightarrow (\tau_1 P)(\varphi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(x+1+j)$$

$$(\tau_{-1}\varphi)(x) = \varphi(x+1)$$

Si $j \in \mathbb{Z} \Rightarrow j+1 \in \mathbb{Z}$

$$(\tau_1 P)(\varphi) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi(x+i) = P(\varphi)$$

$\Rightarrow \underline{\tau_1 P = P} \Rightarrow$ P periodique de periode 1

4- $L = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{[j,\infty)}$

$$L'(\varphi) = -L(\varphi') = -\sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_j^{\infty} \varphi'(\sigma)\,d\sigma = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(j)$$

$$= P(\varphi)$$