Faculté des Sciences
Dept. Maths Tlemcen
Master 1 EDP

Epreuve du contrôle continu du module: Calcul Différentiel et Intégration Durée 1h30

Exercice1(6 points) Soit $f : R^2 \to R^2$, définie par

$$f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2) \text{ et } g = fof.$$

1)Montrer que f et g sont de classe C^1.

2) Calculer en tout point $(x,y) \in R^2$ la matrice jacobienne de f,notée $Df(x,y)$; calculer la matrice jocobienne de g au point $(0,0)$ notée $Dg(0,0)$.

3) Monter qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \overline{B}_\rho(0,0)$ (la boule fermée de rayon ρ et de cente $(0,0)$), on a

$$\|Dg(x,y)\| \leq \frac{1}{2}.$$

4) Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B}_\rho(0,0)$.

Exercice2. (7 points) Soient U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé E et f une application de U dans R. Elle est dite convexe sur U si, pour tous x, $y \in U$ et tout $t \in [0,1]$, on a:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

a) On suppose f différentiable sur U.

(i) Montrer que si f est convexe sur U alors:

$$f(y) - f(x) \geq Df(x)\,(y - x) \text{ pour tous } x \text{ , } y \in U. \qquad (*)$$

(ii) Réciproquement on suppose que la relation (*) est vraie et on se propose de montrer que l'application f est convexe. on pose $z = (1-t)x + ty$ pour $t \in [0,1]$.

Minorer les quantités $f(z) - f(y)$, $f(z) - f(x)$.

En déduire alors que l'application f est convexe.

Exercice3 (4 points) On considère l'application

$$\varphi : R^2 \to R^2; \ (x,y) \to (\sin(\frac{y}{2}) - x, \sin(\frac{x}{2}) - y)$$

(1) Montrer que φ est de classe C^∞.

(2) Calculer la jacobienne de φ et montrer que $D\varphi(x,y)$ est inversible pour tout $(x,y) \in R^2$.

(3) En déduire que φ est un difféomorphisme local de classe C^∞ de R^2 sur son image et que cette image est ouverte.

(4) Montrer que, pour tous u_1 et u_2 avec $u_1 < u_2$, il existe $u \in]u_1, u_2[$ tel que

$$\sin\frac{u_2}{2} - \sin\frac{u_1}{2} = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos(u).$$

Exercice4 (3 points) Montrer que l'équation

$$\cos(x+y) = 1 + x + 2y$$

définit implicitement au voisinage de $(0,0)$ une fonction φ de classe C^1telle que

$$\cos(x + \varphi(x)) = 1 + x + 2\varphi(x).$$

Calculer $\varphi'(0)$.

Corrections

Exercice1:

1) f ayant ses composantes polynômiales est de classe C^∞, de même g étant la composée de f est aussi de classe C^∞.

2) La matrice jacobienne de f est donnée par

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

et celle de g au point $(0,0)$ est

$$\begin{aligned} Dg(0,0) &= Df(f(0,0).Df(0,0) = Df(0,0)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3) Par la continuité de Dg, on en déduit qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour $\|(x,y)\| \leq \rho$, on ait:

$$\|Dg(x,y\| \leq \frac{1}{2}.$$

4) Le théorème des accroissements finis permet alors d'écrire:

$$\begin{aligned} \|g(x,y) - g(0,0)\| &= \|g(x,y)\| \leq \left(\sup_{\|(x,y)\|\leq\rho} \|Dg(x,y\|\right)\|(x,y)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|(x,y)\|. \end{aligned}$$

Maintenant puisque $\overline{B}_\rho(0,0)$ est un espace métrique complet, on déduit que $g:\overline{B}_\rho(0,0)\to\overline{B}_\rho(0,0)$ admet un point fixe unique dans $\overline{B}_\rho(0,0)$.

Exercice2

(i) Supposons que f est convexe, alors $f(x+t\,(y-x))-f(x)\le t\,(f(y)-f(x))$ et en divisons par $0<t\le 1$, on obtient

$$\frac{f(x+t\,(y-x))-f(x)}{t}\le f(y)-f(x)$$

par passage à la limite $t\to 0^+$,on a pour tous x,$y\in U$

$$Df(x)(y-x)\le f(y)-f(x). \qquad (*)$$

(ii) Supposons * vraie et posons $z=(1-t)\,x+ty\in U$, alors d'après *, on a

$$f(y)-f(z)\ge Df(z)\,(y-z)=(1-t)\,Df(z)\,(y-x) \qquad (1)$$

et

$$f(x)-f(z)\ge Df(z)\,(x-z)=tDf(z)\,(y-x) \qquad (2)$$

et en multipliant l'inégalité (1) par t et (2) par $1-t$ on obtient

$$tf(y)-tf(z)\ge tDf(z)\,(y-z)=t\,(1-t)\,Df(z)\,(y-x) \qquad (3)$$

et

$$(1-t)\,f(x)-(1-t)\,f(z)\ge(1-t)\,Df(z)\,(x-z)=(1-t)\,tDf(z)\,(x-y)\,. \qquad (4)$$

On ajoute alors (3) de (4),

$$-f(z)+(1-t)f(x)+tf(y)\ge 0$$

i.e.

$$f((1-t)\,x+ty)\le(1-t)f(x)+tf(y).$$

Exercice3

1) Evidemment φ est bien de classe C^∞.

2) La matrice jacobienne de φ est donnée par:

$$D\varphi(x,y)=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}\\ \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & -1\end{pmatrix}$$

et

$$\det\left(D\varphi(x,y)\right)=1-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}>0$$

par conséquent pour tout $(x, y) \in R^2$, $D\varphi(x, y)$ est inversible.

3) φ est alors un difféomorphisme local de R^2 sur son image $\varphi(R^2)$ qui est un ouvert de R^2, puisque pour tout $z \in f(R^2)$, il existe $(x, y) \in R^2$ tel que $z = f(x, y)$, et comme on vient de voir que φ est un difféomorphisme local il existe alors un ouvert U de R^2 contenant (x, y), un ouvert V de R^2 contenant z tels que $f : U \to V$ est un difféomorphisme. Ce qui montre que $\varphi(R^2)$ est un ouvert de R^2.

(4) Par le théorème des accroissements, on obtient pour tous u_1 et u_2 avec $u_1 < u_2$, il existe $u \in]u_1, u_2[$ tel que

$$\sin \frac{u_2}{2} - \sin \frac{u_1}{2} = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cos(u).$$

Exercice4

Posons $f(x, y) = \cos(x + y) - x - 2y - 1$. Remarqu'on d'abord que $f(x, y) = 0$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\sin(x + y) - 2$$

ce qui donne $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -2$.

En conséquence du théorème des fonctions implicites il existe un intervalle ouvert $I \ni 0$, un intervalle $J \ni 0$ et $\varphi : I \to J$ de classe C^∞ telle que pour tout $x \in I$, on ait $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

i.e.

$$\cos(x + \varphi(x)) = 1 + x + 2\varphi(x).$$

On obtient de cette dernière inégalité

$$1 + 2\varphi'(x) + \sin(x + \varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

soit

$$1 + 2\varphi'(0) = 0$$

i.e.

$$\varphi'(0) = -\frac{1}{2}.$$