Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Décembre 2021.
Analyse d'images. (Master1-EDP_S1)

Epreuve de contrôle continu
(1h50mn)

1) Montrer par récurrence que $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}^*$
$$\langle T^{(n)}, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = (-1)^n \langle T, \phi^{(n)} \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \boxed{2 \text{ pts}}$$

<u>Rappel</u>: Par définition $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

2) Montrer que la dérivée au sens des distributions de la fonction constante est nulle après avoir vérifié qu'elle se trouve dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. $\boxed{1.5 \text{ pts}}$

3) Montrer que $\forall T \in \mathcal{S}'$ $\mathcal{F}(T^{(n)})(\nu) = (2i\pi\nu)^n (\mathcal{F}T)(\nu)$ $\boxed{2.5 \text{ pts}}$

<u>Rappel</u>: $\phi \in \mathcal{S} \Rightarrow (\mathcal{F}\phi(t))^{(n)}(\nu) = \mathcal{F}\left((-2i\pi t)^n \phi(t)\right)(\nu)$

4) Montrer que $\forall T \in \mathcal{S}'$ $(\mathcal{F}(T(t)))^{(n)}(\nu) = \mathcal{F}\left((-2i\pi t)^n T(t)\right)(\nu)$ $\boxed{2.5 \text{ pts}}$

<u>Rappel</u>: $\phi \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{F}(\phi^{(n)})(\nu) = (2i\pi\nu)^n \mathcal{F}(\phi)(\nu)$

5) Montrer qu'au sens des distributions (dans $\mathcal{S}'$) $\mathcal{F}(\delta(t))(\nu) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\nu)$ où $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\nu) = 1 \ \forall \nu \in \mathbb{R}$ $\boxed{1 \text{ pt}}$

6) Montrer que si $T \in \mathcal{S}'$ alors la solution de l'équation dans $\mathcal{S}'$: $\sigma T(\sigma) = 0$ (où $T(\sigma)$ est l'inconnue) n'est autre que $T(\sigma) = K\delta(\sigma)$ avec K constante arbitraire. $\boxed{2.5 \text{ pts}}$

<u>Indication</u>:
Appliquer la transformée de Fourier aux 2 membres de l'équation $\sigma T(\sigma) = 0$. Utiliser ensuite la formule démontrée en 4) avec $n=1$ pour retrouver l'expression de $\mathcal{F}(T)$ en fction de la constante arbitraire $K \in \mathbb{R}$ selon une intégration classique d'une fction (ou distribution) dérivée au sens des distributions (Voir question 2)). On trouvera alors la solution de $\sigma T(\sigma) = 0$ après une ré-application de la T.F. inverse : $\mathcal{F}^{-1}$.

7) Dans cette question, on voudrait utiliser le résultat trouvé en 6) pour montrer qu'au sens des distributions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}}) = \delta$. Pour cela, il faut passer par les étapes svtes :

<u>7a)</u> Calculer $\mathcal{F}(T'(\sigma))(\nu)$ $(\forall \nu \in \mathbb{R})$ $\boxed{1\,pt}$

<u>Indication</u> : Utiliser la question 3)

<u>7b)</u> On pose $T = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$, montrer alors que $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}}')(\nu) = 0 = (2i\pi\nu)\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})(\nu)$ $\forall \nu \in \mathbb{R}$ $\boxed{1\,pt}$

<u>Indication</u> : Utiliser la question 2) dans <u>7a)</u>.

<u>7c)</u> Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}}) = K\delta$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ où $K \in \mathbb{R}$ $\boxed{1\,pt}$

<u>Indication</u> : Utiliser la question 6).

<u>7d)</u> Montrer alors que $K = 1$. $\boxed{1\,pt}$

On en déduit alors que $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}}) = \delta$.

<u>Indication</u> : Introduire la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: $\phi(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$ dont la T.F. est $\mathcal{F}(\phi(\nu))(\sigma) = e^{-\pi\sigma^2}$ (ϕ est invariante par T.F.)

Donc $\mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ aussi et on rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\sigma^2} d\sigma = 1$

8) Etant donnée une suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on définit sa transformée de Fourier numérique par $X_T(\sigma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n\sigma T}$.

Calculer alors la transformée numérique inverse afin de retrouver la suite x_n $(n \in \mathbb{Z})$ à partir de sa T.F.N. $X_T(\sigma)$.

<u>Indication</u> : Calculer l'intégrale : $\boxed{4\,pts}$

$$T\int_{-\frac{1}{2T}}^{1/2T} X_T(\sigma) e^{2i\pi p\sigma T}\, d\sigma \quad \text{pour } p \in \mathbb{Z}$$

Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2021/2022.
Décembre 2021.
Analyse d'images. (Master1-EDP_S1)

Corrigé de l'épreuve de contrôle continu

1) On montre, par récurrence, que $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\langle T^{(n)}, \phi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = (-1)^n \langle T, \phi^{(n)}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Sachant que $\langle T', \phi\rangle = -\langle T, \phi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (0,5pt)

(Si $n=2$ $\langle T^{(2)}, \phi\rangle = -\langle T', \phi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = (-1)^2\langle T, \phi''\rangle = (-1)^2\langle T, \phi^{(2)}\rangle$)

Supposons que cela reste vrai à l'ordre $n=k$ et montrons que c'est vrai à l'ordre $n=k+1$: Hypothèse de récurrence

$$\langle T^{(n)}, \phi\rangle = (-1)^n\langle T, \phi^{(n)}\rangle \quad \forall n \leq k \quad (0.5pt)$$

$$\langle T^{(k+1)}, \phi\rangle = \langle (T^{(k)})', \phi\rangle = -\langle T^{(k)}, \phi'\rangle = -(-1)^k\langle T, (\phi')^{(k)}\rangle$$

$$= (-1)^{k+1}\langle T, \phi^{(k+1)}\rangle \text{ et ceci } \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad (1pt)$$

2) La fction constante étant bornée, elle se trouve dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et par suite elle définit une distribution régulière de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (0,5pt)

$Cste : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto Cste(x) = c$

$Cste \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ $\langle Cste', \phi\rangle = -\langle Cste, \phi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$

$$= -Cste\int_{\mathbb{R}} \phi'(t)\,dt = \phi(+\infty) - \phi(-\infty) = \lim_{x\to+\infty}\phi(x) - \lim_{x\to-\infty}\phi(x)$$

$$= 0 - 0 = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad (1pt)$$

Donc $\langle Cste', \phi\rangle = 0$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow Cste' = 0$ ds $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

3) Montrons que $\forall T \in \mathcal{S}'$ $\mathcal{F}(T^{(n)})(\nu) = (2i\pi\nu)^n(\mathcal{F}T)(\nu)$:

$$\forall \phi \in \mathcal{S} \quad \langle \mathcal{F}(T^{(n)}_{(\sigma)})(\nu), \phi(\nu)\rangle = \langle T^{(n)}(\sigma), \mathcal{F}(\phi(\nu))(\sigma)\rangle \overset{\text{question 1)}}{=} \quad (0.5pt)$$

(0.5pt + 0.5pt) $= (-1)^n\langle T(\sigma), [\mathcal{F}(\phi(\nu))]^{(n)}(\sigma)\rangle = (-1)^n\langle T(\sigma), \mathcal{F}[(-2i\pi\nu)^n\phi(\nu)](\sigma)\rangle$

(0.5pt) $= (-1)^n\langle \mathcal{F}(T(\sigma))(\nu), (-2i\pi\nu)^n\phi(\nu)\rangle$ ici $\nu \mapsto (2i\pi\nu)^n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

(0.5pt) $= (-1)^n\langle (-1)^n(2i\pi\nu)^n\mathcal{F}(T(\sigma))(\nu), \phi(\nu)\rangle = \langle (2i\pi\nu)^n\mathcal{F}(T)(\nu), \phi(\nu)\rangle$

Donc $\forall \phi \in \mathcal{S}$ $\langle \mathcal{F}(T^{(n)}(\sigma))(\nu), \phi(\nu)\rangle = \langle (2i\pi\nu)^n\mathcal{F}(T(\sigma))(\nu), \phi(\nu)\rangle$

D'où le résultat au sens des distributions dans $\mathcal{S}'$.

4) Montrons que $\forall T \in \mathcal{S}'$ $(\mathcal{F}(T(t)))^{(n)}(\nu) = \mathcal{F}((-2i\pi t)^n T(t))(\nu)$

$$\forall \phi \in \mathcal{S} \quad \langle (\mathcal{F}(T(t)))^{(n)}(\nu), \phi(\nu)\rangle \overset{0.5pt}{=} (-1)^n\langle \mathcal{F}(T(t))(\nu), \phi^{(n)}(\nu)\rangle \overset{0.5pt}{=} (-1)^n\langle T(t), \mathcal{F}(\phi^{(n)})(t)\rangle$$

(0.5pt) $= (-1)^n\langle T(t), (2i\pi t)^n\mathcal{F}(\phi)(t)\rangle \overset{0.5pt}{=} (-1)^n\langle (2i\pi t)^n T(t), \mathcal{F}(\phi)(t)\rangle$

(0.5pt) $= \langle (-2i\pi t)^n T(t), \mathcal{F}(\phi)(t)\rangle = \langle \mathcal{F}((-2i\pi t)^n T(t))(\nu), \phi(\nu)\rangle$

Suite de la rép. à la quest. 4)

D'où le résultat $(\mathcal{F}T(t))^{(n)}(\nu) = \mathcal{F}((-2i\pi t)^n T(t))(\nu)$ dans $\mathcal{S}'$.

5) Montrons que dans $\mathcal{S}'$ $\mathcal{F}(\delta(t))(\nu) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\nu) = 1 \ \forall \nu \in \mathbb{R}$:

$$\langle (\mathcal{F}(\delta(t)))(\nu), \phi(\nu)\rangle = \langle \delta(t), (\mathcal{F}\phi)(t)\rangle = (\mathcal{F}\phi)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\sigma) e^{-2i\pi\sigma.0} d\sigma$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\sigma)\, d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} 1.\phi(\sigma)\, d\sigma = \langle 1, \phi\rangle = \langle \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\nu), \phi(\nu)\rangle \ \forall \phi \in \mathcal{S}$$ (1pt)

D'où le résultat : $\mathcal{F}(\delta) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{S}'$

6) D'après la question 4) ($n=1$) et $\mathcal{F}$ étant linéaire :

$$\mathcal{F}(\sigma T(\sigma))(\nu) \overset{0.5pt}{=} \frac{1}{-2i\pi} \mathcal{F}((-2i\pi\sigma)T(\sigma))(\nu) \overset{0.5pt}{=} \frac{-1}{2i\pi}(\mathcal{F}(T(\sigma)))'(\nu) = 0 \ (= \mathcal{F}(0))$$

c.à d. $\frac{i}{2\pi}(\mathcal{F}(T(\sigma)))'(\nu) \overset{0.5pt}{=} 0 \underset{\text{question 2)}}{\Rightarrow} \mathcal{F}(T(\sigma))(\nu) = K = K.\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\nu) \overset{0.5pt}{=} K\,\mathcal{F}(\delta(\sigma))(\nu)$ quest. 5)

$\xrightarrow[\text{de } \mathcal{F}^{-1}]{\text{Application}} T(\sigma) = K\delta(\sigma)$ (0.5pt)

7) Montrons que dans $\mathcal{S}'$: $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}}) = \delta$ en utilisant le résultat de la quest. 6) : D'après la question 3) $\mathcal{F}(T')(\nu) = (2i\pi\nu)\mathcal{F}(T)(\nu)$ où $T \in \mathcal{S}'$. (1pt)

($n=1$ ds la quest. 3))

7a)

7b) $T = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ $T' = 0$ ds $\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \supset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (d'après la quest. 2))

Par ailleurs $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}}')(\nu) = \mathcal{F}(0_{\mathbb{R}})(\nu) = 0 = (2i\pi\nu)\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})(\nu) \ \forall \nu \in \mathbb{R}$ (1pt)

7c) $\Rightarrow \nu\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})(\nu) = 0 \ \forall \nu \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{quest. 6)}} \mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})(\nu) = K\delta(\nu) \ \forall \nu \in \mathbb{R}$ (1pt)

c.à d. $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}}) = K\delta$ ds $\mathcal{S}'$.

7d) On introduit $\phi \in \mathcal{S}$ t.q $\phi(x) = e^{-\pi x^2} \Rightarrow \mathcal{F}(\phi)(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$ ($\in \mathcal{S}$)

Donc $\langle K\delta, \phi\rangle = \langle \mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})(\nu), \phi(\nu)\rangle = \langle \mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}})(\nu), e^{-\pi\nu^2}\rangle$ (0.5pt)

$$= \langle \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\sigma), \mathcal{F}(e^{-\pi\nu^2})(\sigma)\rangle = \langle \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\sigma), e^{-\pi\sigma^2}\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\sigma^2} d\sigma = 1 = \langle K\delta(\nu), \phi(\nu)\rangle = K\langle \delta(\nu), \phi(\nu)\rangle$$

$$= K\phi(0) = K e^{-\pi.0^2} = K$$ (0.5pt)

c.à d. $K = 1$.

D'où le résultat $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{\mathbb{R}}) = \delta$ ds $\mathcal{S}'$.

8) Définition de la transformée de Fourier numérique inverse

Il faut donc retrouver la suite x_n $(n \in \mathbb{Z})$ à partir de sa transformée de Fourier numérique : $X_T(\sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n\sigma T}$.

Pour cela, on calcule l'intégrale :

$$T\int_{-1/2T}^{1/2T} X_T(\sigma) e^{2i\pi p\sigma T} d\sigma = T\int_{-1/2T}^{1/2T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n\sigma T} e^{2i\pi p\sigma T} d\sigma$$

$$= T\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \int_{-1/2T}^{1/2T} e^{2i\pi\sigma(p-n)T} d\sigma = T\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq p}} x_n \int_{-1/2T}^{1/2T} e^{2i\pi\sigma(p-n)T} d\sigma + T x_p\left(\frac{1}{T}\right)$$

car si $n=p$

$$\int_{-1/2T}^{1/2T} e^{2i\pi\sigma.0.T} d\sigma = \frac{1}{2T} - \left(-\frac{1}{2T}\right) = \frac{1}{T}$$

Par ailleurs, lorsque $n \neq p$

$$\int_{-1/2T}^{1/2T} e^{2i\pi\sigma(p-n)T} d\sigma = \frac{1}{2i\pi(p-n)T}\left[e^{2i\pi\sigma(p-n)T}\right]_{-1/2T}^{1/2T}$$

$$= \frac{1}{2i\pi(p-n)T}\left(e^{2i\pi(p-n)T\left(\frac{1}{2T}\right)} - e^{-2i\pi(p-n)T(1/2T)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i\pi(p-n)T}\left(e^{i\pi(p-n)} - e^{-i\pi(p-n)}\right) = \frac{1}{\pi(p-n)T}\sin((p-n)\pi)$$

$$= 0 \text{ car } p, n \in \mathbb{Z} \text{ et } p \neq n$$

Donc $T\int_{-1/2T}^{1/2T} X_T(\sigma) e^{2i\pi p\sigma T} d\sigma = T x_p\left(\frac{1}{T}\right) = x_p \quad p \in \mathbb{Z}$.

D'où la transformée numérique inverse :

$$X_T(\sigma) \xrightarrow{T.F.N.^{-1}} x_n = T.F.N^{-1}(X_T) = T\int_{-1/2T}^{1/2T} X_T(\sigma) e^{2i\pi n\sigma T} d\sigma$$