

Correction du contrôle

- 1) Rappeler la définition d'un espace normé complet.
 Un espace normé complet est un espace vectoriel muni d'une norme dont toute suite de cauchy est convergente.
- 2) Soient E et F deux espaces normés avec $\neq \{0\}$. Montrer que F complet $\Rightarrow L(E, F)$ complet.
 Soit $(T_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ une suite de cauchy dans $L(E, F)$ i.e.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \text{ tel que } p \geq 0 \text{ et } n \geq N_\epsilon \Rightarrow \|T_{n+p} - T_n\| \leq \epsilon$$

et par conséquent $\|(T_{n+p} - T_n)x\| \leq \|T_{n+p} - T_n\| \|x\| \leq \epsilon \|x\| \forall x \in E$. Ce qui montre que $(T_n x)$ est une suite de cauchy dans F qui est complet. Soit Tx la limite de $(T_n x)$. T est linéaire car t_n l'est. Lorsque $p \rightarrow +\infty$ pour n fixé on aura

$$\|(T - T_n)x\| \leq \epsilon \|x\| \Rightarrow T - T_n \in L(E, F)$$

donc $T \in L(E, F)$ Il en résulte que $\|T - T_n\| \leq \epsilon$ ce qui veut dire que T la limite de (T_n) est dans $L(E, F)$.

- 3) Soit E un espace de Banach et $S \in L(E)$. Montrer que si $TS = ST$, alors TS est inversible si et seulement si T et S sont inversibles.
 Si S et T sont inversibles on a TS est inversible et on $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$
 En effet

$$(TS)(TS)^{-1} = TSS^{-1}T^{-1} = Id$$

et

$$(TS)^{-1}(TS) = S^{-1}T^{-1}TS = Id$$

Maintenant si TS est inversible alors il existe A tel que $(TS)A = A(TS) = Id$. Comme $ST = TS$ on a

$$\text{d'un côté } Id = A(TS) = (AT)S$$

$$\text{et de l'autre } Id = A(TS) = (TS)A = (ST)A = S(TA)$$

d'où S est inversible

On fait de même pour T .

- 4) Soit $E = C([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on définit

$$Tf(x) = \int_0^x K(x, t)f(t)dt$$

où $K(\cdot, \cdot) \in C([0, 1] \times [0, 1])$. Soit $M = \sup_{0 \leq x, t \leq 1} |K(x, t)|$.

- (a) Montrer que $T \in L(E)$.

Pour la linéarité $\forall x \in [0, 1], \forall f, g \in E$ on a

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \beta g)(x) &= \int_0^x K(x, t)(\lambda f(t) + \beta g(t))dt \\ &= \lambda \int_0^x K(x, t)f(t)dt + \beta \int_0^x K(x, t)g(t)dt \\ &= \lambda T f(x) + \beta T g(x) \end{aligned}$$

Pour la continuité $\forall x, x_0 \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tf(x_0)| &= \left| \int_0^x K(x, t)f(t)dt - \int_0^{x_0} K(x_0, t)f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_0^{x_0} [K(x, t) - K(x_0, t)]f(t)dt + \int_{x_0}^x K(x, t)f(t)dt \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^{x_0} |K(x, t) - K(x_0, t)|dt + M\|f\|_\infty |x - x_0| \end{aligned}$$

D'où $|Tf(x) - Tf(x_0)| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow x_0$ ce qui veut dire $Tf \in L(E)$.

D'autre part $|Tf(x)| \leq Mx\|f\|_\infty$ d'où

$$\|Tf\| \leq M\|f\|_\infty \text{ et } T \in L(E) \text{ avec } \|T\| \leq M.$$

- (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $|T^n f(x)| \leq \frac{M}{n!} x^n \|f\|_\infty$. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\|T^n\| \leq \frac{M}{n!}$.
On utilise la récurrence.