Université de Tlemcen, Faculté des sciences, Département de Mathématiques
Master Biomathématiques M1. Module Théorie de bifurcations
Examen de rattrapage. Durée 1h30.

Exercice : **08 pts** Soit le système de Lorenz

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sigma (y - x) \\ y'(t) &= rx - y - xz \\ z'(t) &= xy - bz \end{aligned}$$

a) **02 pts** Montrer que l'axe oz est invariant par le flot du système.

b) **02 pts** Montrer que dans le plan de phase , le volume diminue avec le flot.

c) **02 pts** En déduire que le système n'admet de solution quasi-périodiques

d) **02 pts** Montrer qu'il existe une région $E \subset R^3$ telle que toute les trajectoires des solutions rentrent dans E à partir d'un certain temps.

Solution: voir le corrigé de l'examen final

Exercice: 08 pts Soit le système

$$P_\mu \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = y - x + xy \\ y' = x - y - x^2 \end{array} \right.$$

a) **02 pts** Montrer que la variété centre existe au voisinage de $(0,0)$.

b) **01 pts** Calculer les valeurs propores de la matrice jacobienne $J(0,0)$ en $(0,0)$.

c) **01 pts** Soit

$$U^{-1} = (e_1, e_2)$$

où e_1, e_2 sont les vecteurs propres. Calculer U.

d) **01pts** Posons

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecrire le système différentiel que vérifie u et v.

e) **01 pts** Trouver E_c pour le systéme u et v en $(0,0)$

f) **01 pts** Trouver W_c pour le système en $(u,v) = (0,0)$.

g) **01pts** Ecrire le système réduit .En déduire la nature du point d'équilibre $(x,y) = (0,0)$.

Solution:

a) on écrit le système sous la forme

$$X' = AX + G(X) \ ,$$

et on montre que

$$G(X) = o(X) \, , \text{ quand } X \to 0$$

b) On a

$$J(0,0)=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$

c) les vecteurs propres sont $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) On a

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}$$

et le nouveau système est

$$\begin{cases} u' = uv - v^2 \\ v' = -2v + uv - u^2 \end{cases}$$

f) la variété centre

$$W_c = \left\{(u,v) : v = h(u) = -\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^{3....}\right\}$$

g) le système réduit est

$$u' = uv - v^2 = -\frac{1}{3}u^3...$$

et le point $u = 0$ est stable.

Exercice 2: 04 pts Soit le système

$$S_\mu \quad \begin{cases} x' = -y + \mu x + xy^2 \\ y' = x + \mu y - x^2 \end{cases} \qquad \mu \in R^+ \text{ un paramètre}$$

a) **02 pts** Montrer que le système (S_μ) admet une bifurcation de Hopf au voisinage de $(0,0)$.

la matrice jacobienne est

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

les valeurs propores sont

$$\lambda_1 = \mu + i,\ \lambda_2 = \mu - i$$

b)**02 pts** Donner la nature de cette bifurcation.

Un calcul simple de l'indice de Marsden McCraken donne que la bifurcation est sous critique.