Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2021/2022*
Faculté des Sciences / Département de Mathématiques
Master Biomathématiques et Modélisation

Final : Méthodes de Réduction II

8 juin 2022

Exercice 1 [**12pts**] : Soit le système

$$(S_\varepsilon) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x(x^2 + y^2 - \dfrac{a}{\varepsilon}), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y(x^2 + y^2 - \dfrac{a}{\varepsilon}), \end{cases}$$

où $a \in$ R et $0 < \varepsilon \ll 1$.

I) 1) En changeant l'échelle de temps, écrire (S_ε) comme un système (σ_ε) régulièrement déformé par le paramètre ε. Noter par τ ce nouveau temps.

2) Si $a < 0$, donner un résultat de stabilité pratique quand $\varepsilon \to 0$ pour le système (σ_ε). Préciser ce qui est apparent dans cette stabilité, en utilisant une fonction de Lyapounov quadratique.

3) Si $a > 0$, montrer que les solutions non nulles de (σ_ε) sont non bornées quand $\varepsilon \to 0$ (une sorte de *non bornitude pratique*). Préciser en quoi cette non bornitude est apparente, en utilisant une fonction de Lyapounov quadratique ou un passage aux coordonnées polaires.

II) Soit le système

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{z} = f(z), \\ \dot{x} = yz - x(x^2 + y^2 - b), \\ \dot{y} = -x - yz(x^2 + y^2 - b), \end{cases}$$

où $b \in$ R* et où f est une fonction C^1 sur R et telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) < 0$.

Peut-on appliquer le théorème de convergence de Thieme à (Σ)?

Qu'en est-il du cas $b = 0$?

Exercice 2 [**8 pts**] :

I) 1) Appliquer, en le justifiant, le premier théorème de Fenichel pour les systèmes singulièrement perturbés au système suivant :

$$(S_\varepsilon) \quad \begin{cases} \varepsilon\dot{x} = x - y + \varepsilon, \\ \dot{y} = x - \varepsilon. \end{cases}$$

2) Etablir l'équation de variété (E) que doit vérifier la fonction définissant la variété de Fenichel $\mathbf{M}_\varepsilon$

3) Trouver la solution de (E) qui donne une approximation $O(\varepsilon^3)$ de la variété de Fenichel. En déduire le problème réduit correspondant.

4) Tracer dans un même repère la variété critique et l'approximation $\tilde{\mathbf{M}}_\varepsilon$ obtenue, pour $\varepsilon = 0.1$.

II) Donner un exemple de système lent-rapide pour lequel on peut appliquer la théorie de Fenichel mais pas celle de Tikhonov. Donner un exemple de système lent-rapide pour lequel on peut appliquer la théorie de Tikhonov mais pas celle de Fenichel. Justifier vos réponses.

Corrigé : Final Méthodes de Réduction II

Au 2021/2022

- Exercice 1 :

I) 1) On pose $\tau = \frac{t}{\varepsilon} \Leftrightarrow t = \varepsilon\tau$.

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \left(y - x\left(x^2 + y^2 - \frac{a}{\varepsilon}\right)\right) \cdot \varepsilon$$

$$= \varepsilon y - x\left(\varepsilon x^2 + \varepsilon y^2 - a\right)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = -\varepsilon x - y\left(\varepsilon x^2 + \varepsilon y^2 - a\right)$$

D'où (S_ε) s'écrit,

$$(\sigma_\varepsilon) \begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \varepsilon y - x(\varepsilon x^2 + \varepsilon y^2 - a) \\ \dfrac{dy}{d\tau} = -\varepsilon x - y(\varepsilon x^2 + \varepsilon y^2 - a) \end{cases} \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

2) Supposons que $a < 0$.
Le problème (ou équation) réduit du système régulièrement perturbé (σ_ε) est :

$$(\sigma_0) \begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = ax \\ \dfrac{dy}{d\tau} = ay \end{cases}$$

Comme $a < 0$, $(0,0)$ est GAS pour (σ_0) (linéaire)
Donc, $(0,0)$ est SGPAS quand $\varepsilon \to 0$ pour (σ_ε).

- $(0,0)$ est bien un équilibre de (σ_ε), $\forall \varepsilon > 0$ fixé
On peut voir que c'est le seul équilibre.

On peut voir aussi, par linéarisation, qu'il est L.A.S mais, pour l'attractivité globale, il faudrait utiliser une Lyapounov.

[Notez que l'on peut aussi utiliser le critère négatif de Dulac pour exclure l'existence d'un cycle limite, mais il faudrait en plus établir que les solutions sont positivement bornées.

1) Prenons $V(x,y) = \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{2}y^2$, $\alpha>0, \beta>0$ (à déterminer)

qui est définie positive

$\dot V(x,y) = \alpha x\dot x + \beta y \dot y = \alpha \varepsilon xy - \alpha x^2(\varepsilon x^2+\varepsilon y^2 - a)$

$- \varepsilon\beta xy - \beta y^2(\varepsilon x^2+\varepsilon y^2 - a)$

Si on choisit $\alpha=\beta$, on obtient

$$\dot V(x,y) = -\alpha \underbrace{(x^2+y^2)}_{\geq 0}\underbrace{(\varepsilon x^2+\varepsilon y^2 - a)}_{>0}$$

d'où $\dot V(x,y) \leq 0$ et $\dot V(x,y) = (0,0)$ ssi $(x,y)=(0,0)$

i.e $\dot V$ est définie négative.

Comme V est radialement non borné dans $\mathbb{R}^2$,

alors $(0,0)$ est un équilibre G.A.S pour (Σ).

c) Rien n'est apparent dans la propriété SGPAS qd $\varepsilon \to 0$ car $(0,0)$ est un vrai équilibre GAS !

3) Dans le même esprit que pour la stabilité pratique, il nous suffit de vérifier que les solutions non nulles de (Σ_0) sont non bornées.

Or, si $\underline{a > 0}$, sachant que (Σ_0) est linéaire (on peut même produire les solutions $(x(t)e^{at}, y(t)e^{at})$), l'équilibre $(0,0)$ est répulsif, ce n'est pas un point stable. Donc toutes les solutions non nulles convergent vers l'infini quand $t \to +\infty$.

Ainsi, les solutions de (Σ_ε) sont non bornées quand $\varepsilon \to 0$.

- Qu'en est-il vraiment pour $\varepsilon > 0$ fixé ?

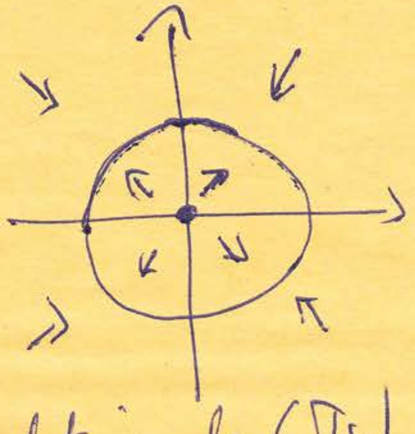
On peut passer aux coordonnées polaires pour mettre en évidence un cycle limite stable.
On peut aussi utiliser la fonction de Lyapunov précédente :

$$\dot V(x,y) = \underbrace{-\alpha(x^2+y^2)}_{\leq 0}(\varepsilon x^2+\varepsilon y^2 - a), \quad \underline{a>0}$$

$\dot V(x,y) > 0$ ssi $0 < x^2+y^2 < \frac{a}{\varepsilon}$ (intérieur du disque de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}$)

$\dot V(x,y) < 0$ ssi $x^2+y^2 > \frac{a}{\varepsilon}$ (extérieur du disque)

$\dot V(x,y) = 0$ en $(0,0)$ et sur le cercle $C(0, \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}})$.



$C(0,\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}})$ est un cycle limite stable.

Les solutions non nulles de (D_ε) convergent toutes, orbitalement, vers le cycle limite et sont donc bornées ! ($\varepsilon > 0$ fixé).

1,5

L'apparence de non bornitude quand $\varepsilon \to 0$ vient du fait que le rayon du cycle tend vers $+\infty$ quand $\varepsilon \to 0$!

0,5

Intéressant, On peut donc rendre les solutions non nulles aussi grandes en norme qu'on le veut !

II) L'hypothèse sur f signifie que $z = 1$ est un équilibre ~~globalement~~ exponentiellement stable pour $\dot{z} = f(z)$. (ici f n'est pas nécessairement linéaire mais généralise le résultat du th. de Thieme. (Dit en TD)

0,5

Le problème limite est :

(4)

$$(L)\begin{cases}\dot{x} = y - x(x^2+y^2-b)\\ \dot{y} = -x - y(x^2+y^2-b)\end{cases}$$

1

• Si $b>0$ (L) admet $C(0,\sqrt{b})$ comme cycle limite. On ne peut pas appliquer le théorème de convergence de Thieme. [un point du cycle n'appartient pas à la variété stable d'un équilibre hyperbolique]

1.5

• Si $b<0$. $(0,0)$ est le seul point d'équilibre de (L). Il est (globalement) A.S (d'après la partie I). Il reste à vérifier s'il est hyperbolique (i.e, dans ce cas, exponentiellement stable.

2

$$\text{Jac}(0,0) = \begin{pmatrix} b & 1\\ -1 & b\end{pmatrix} \quad \begin{matrix} tr = 2b < 0\\ \det = b^2+1 > 0\end{matrix}$$

Donc $(0,0)$ est hyperbolique.
Les autres hypothèses sont clairement vérifiées.
Le th. de Thieme est applicable: si $(z(0), x(t), y(t))$ est tel que $z(0)$ est dans le bassin d'attraction de $z=1$, alors ~~(x(t),y(t))~~ $(z(t), x(t), y(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} (1,0,0)$.

[5]

• Si $b=0$ (L) $\begin{cases} \dot{x} = y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = -x - y(x^2+y^2) \end{cases}$

qui a pour linéarisé en $(0,0)$ $\begin{cases} \dot{x} = y. \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

$(0,0)$ est un centre. Il n'est pas hyperbolique

$\left\{ \text{Jac}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{Tr = 0}} \right.$

On ne peut pas appliquer le th. de Thomé

Rem : Si $b<0$, les sol. de (E) sont bornées (pourvu que $z(0)$ soit dans le bassin d'attraction de $z=1$).

Exercice 2

I) 1) • Le champ est évidemment C^∞ / x, y et ε (H1)

• $f(x,y,\varepsilon) = x - y - \varepsilon$

Variété critique : $f(x,y,0) = 0 \iff x = h_0(y) = y$

si $y \in K \underset{cpt}{\subset} \mathbb{R}$, M_0 est compacte.

Equation rapide $\begin{cases} x' = x - y + \varepsilon \\ y' = \varepsilon(x - \varepsilon) \end{cases}$ $\quad ()' = \frac{d}{d\tau}$

$\tau = \frac{t}{\varepsilon}$

$\underset{\varepsilon=0}{\text{Jac}}(\hat{x},\hat{y}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \boxed{0} \end{pmatrix} \to$ seule val. propre à partie réelle nulle.

M_0 est donc normalement hyperbolique.

1) D'après le théorème de Fenichel, pour ε assez petit, il existe une variété M_ε, $O(\varepsilon)$ proche de M_0, difféomorphe à M_0, localement invariante pour le flot de (S_ε) et C^r en y etc $\forall r < \infty$.

1

2) $f(x,y,\varepsilon) = x - y + \varepsilon$, $g(x,y,\varepsilon) = x - \varepsilon$

Comme (M_0) a pour équation $x = h_0(y) = y$, $y \in K$

et que h_0 est régulière, on peut assurer que pour ε assez petit, (M_ε) est le graphe d'une fonction $h_\varepsilon : K \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$y \longmapsto x = h_\varepsilon(y)$$

On cherche h_ε sous la forme

$$h_\varepsilon(y) = h(y,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^k h_k(y) + O(\varepsilon^N)$$

$(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon)) \in M_\varepsilon \overset{\text{invariance}}{\underset{\text{locale}}{\Longrightarrow}} (x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)) \in M_\varepsilon \ \forall t \in [0,T]$

i.e $x(0,\varepsilon) = h_0(y(0,\varepsilon)) \Longrightarrow x(t,\varepsilon) = h(y(t,\varepsilon),\varepsilon) \ \forall t \in [0,T]$

On dérive / t :

$$\dot{x}(t,\varepsilon) = \frac{\partial h}{\partial y}(y(t,\varepsilon),\varepsilon) \cdot \dot{y}(t,\varepsilon)$$

$$\overset{(S_\varepsilon)}{\iff} \frac{1}{\varepsilon} f(h(y(t,\varepsilon),\varepsilon), y(t,\varepsilon), \varepsilon) = \frac{\partial h}{\partial y}(y(t,\varepsilon),\varepsilon) \cdot g(h(y(t,\varepsilon),\varepsilon), y(t,\varepsilon), \varepsilon)$$

$$(\Rightarrow)(\ldots)(\Rightarrow) \quad \boxed{f(h(y,\varepsilon),y,\varepsilon)-\varepsilon\frac{\partial h}{\partial y}(y,\varepsilon)\cdot g(h(y,\varepsilon),y,\varepsilon)=0} \quad (E)$$

3) $x=h(y,\varepsilon)=h_0(y)+\varepsilon h_1(y)+\varepsilon^2 h_2(y)+O(\varepsilon^3)$.

D'après (E), d'un part:

$$f(h(y,\varepsilon),y,\varepsilon)=f(h_0(y)+\varepsilon h_1(y)+\varepsilon^2 h_2(y)+O(\varepsilon^3),y,\varepsilon)$$

$$\underset{(S_\varepsilon)}{=} h_0(y)+\varepsilon h_1(y)+\varepsilon^2 h_2(y)-y+\varepsilon+O(\varepsilon^3)$$

$$=(h_0(y)-y)+\varepsilon(h_1(y)+1)+\varepsilon^2 h_2(y)+O(\varepsilon^3)$$

D'autre part,

$$\varepsilon\frac{\partial h}{\partial y}(y,\varepsilon)\cdot g(h(y,\varepsilon),y,\varepsilon)$$

$$\underset{(S_\varepsilon)}{=}\left(\varepsilon h_0'(y)+\varepsilon^2 h_1'(y)+O(\varepsilon^3)\right)\left(h_0(y)+\varepsilon h_1(y)+\varepsilon^2 h_2(y)+O(\varepsilon^3)-\varepsilon\right)$$

$$=(\ldots)=\varepsilon h_0'(y)\cdot h_0(y)+\varepsilon^2\left(h_0'(y)h_1(y)-h_0'(y)+h_1'(y)h_0(y)\right)+O(\varepsilon^3)$$

Par identification,

- $h_0(y)-y=0 \Rightarrow h_0(y)=y$ comme prévu.
- $h_1(y)+1=h_0'(y)\cdot h_0(y) \Rightarrow h_1(y)=y-1$
- $h_2(y)=h_0'(y)\cdot h_1(y)-h_0'(y)+h_1'(y)h_0(y)=2y-2$

$y\in K$

Ainsi,

$$h_\varepsilon(y) = y + \varepsilon(y-1) + \varepsilon^2(2y-2) + O(\varepsilon^3)$$

Problème réduit: $\begin{cases} \dot y = g(h_\varepsilon(y), y, \varepsilon) \end{cases}$

$$= h_\varepsilon(y) - \varepsilon$$

$$= (\dots) = y + \varepsilon(y-2) + \varepsilon^2(2y-2) + O(\varepsilon^3)$$

1

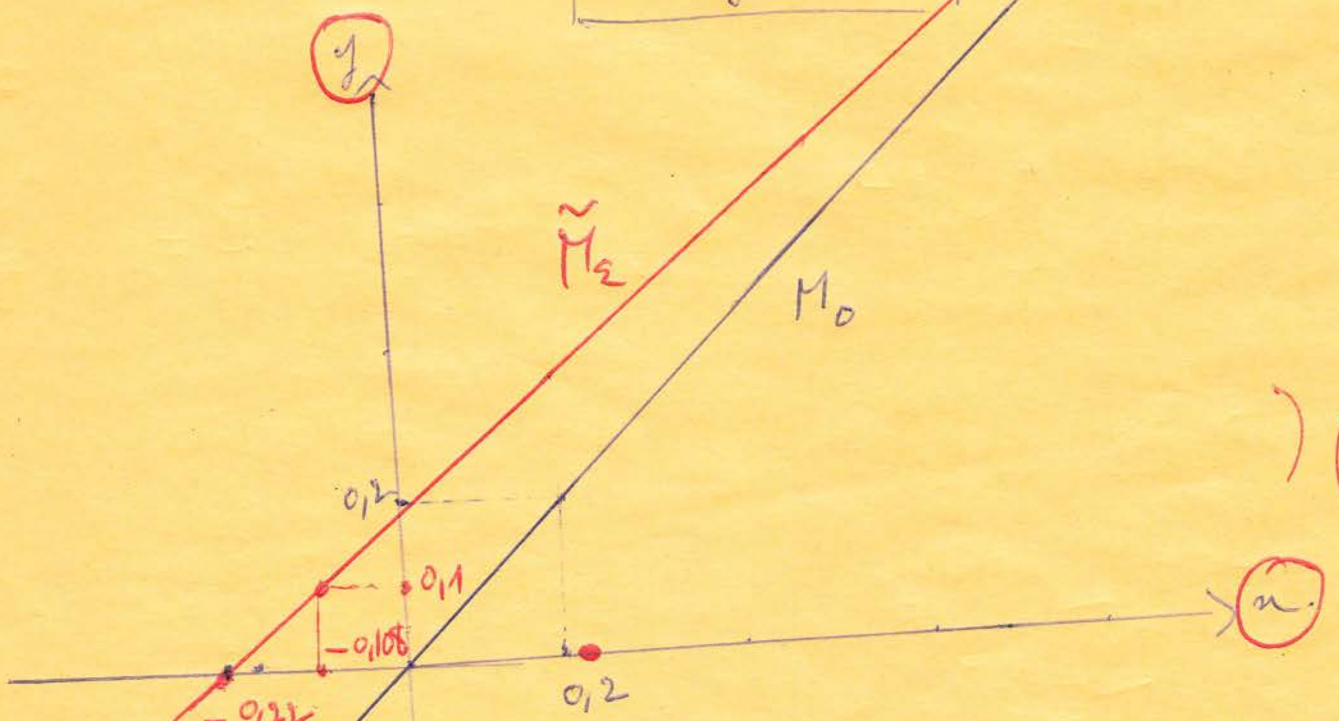
4) Sur $\tilde M_\varepsilon$, obtenu en négligeant $O(\varepsilon^3)$, on a:

$$\dot y = y + \varepsilon(y-2) + \varepsilon^2(2y-2)$$

$$\boxed{x} = y + \varepsilon(y-2) + \varepsilon^2(2y-2) \Leftrightarrow x = \underbrace{(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)y - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2}_{\tilde h(y,\varepsilon)}$$

(1,8), 1,85

$$= \boxed{1,12y - 0,22}$$



1

II) ◦ Exemple où on peut appliquer le th. de Tikhonov mais pas celui de Fenichel

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -x - |y| \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}, \quad g \text{ continue}$$

~~Vardi~~ $f(x,y) = -x - |y|$ n'est pas C^1
Mais toutes les hypothèses du th. de Tikhonov sont vérifiées. (AVAS)

◦ Exemple où on peut appliquer le th. de Fenichel mais pas celui de Tikhonov.

(S_ε) de la partie I de cet exercice.

~~La~~ Variété critique n'est pas attractive!

1

1