**Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen**
**Faculté des Sciences**
**Département de Mathématiques**

**Année Universitaire : 2021-2022**
**Module : Contrôle optimal**
**Date : 29-05-2022**

**Niveau :** ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

# EXAMEN FINAL.

## Exercice 1 : Contrôle d'un arbovirus à l'aide d'une population de moustiques (La technique des insectes incompatibles).

On souhaite contrôler une population de moustiques sauvages (Aedes) au moyen de moustiques infectés par une bactérie du nom de Wolbachia afin de limiter la propagation d'arbovirus tels la dengue. Chez les principales espèces vectrices comme Aedes aegypti, si un moustique mâle infecté par Wolbachia s'accouple avec une femelle non infectée, les embryons meurent au début du développement, dans les premières divisions mitotiques. Ceci se produit même si le mâle et la femelle sont tous deux infectés par Wolbachia mais sont porteurs de souches mutuellement incompatibles. Ce phénomène porte le nom d'incompatibilité cytoplasmique (CI). L'utilisation de moustiques infectés par la bactérie Wolbachia permet de contrôler le développement des populations de moustiques sauvages.

Dans cet exercice nous étudions le problème de contrôle simplifié modélisant une stratégie de remplacement de population, où l'on agit sur la population sauvage au moyen de lâchers d'individus infectés répartis dans le temps. Supposons que les taux de natalité des moustiques sont élevés par rapport aux taux de mortalité, ce qui est pertinent puisque les espèces vectorielles (Aedes) ont généralement un pouvoir de reproduction très élevé. Il est alors raisonnable de considérer que la proportion $x$ de moustiques infectés par Wolbachia est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) + u(t)\, g(x(t)),\ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $f(x) = x(1-x)(x-\theta)$, avec $\theta \in ]0,1[$ un paramètre réel fixé, $u(t)$ désigne la densité de moustiques infectés (en laboratoire) par Wolbachia et libérés au temps $t \in [0,T]$ et $g$ une fonction de classe $C^1$ supposée strictement positive sur $]0,1[$, telle que $g(0) = g(1) = 0$ et $x_0 \in ]0,1[$.

Soient $M > 0$ et $C \in ]0, MT[$. Une stratégie de libération optimale de moustiques en temps $T$ s'obtient (par exemple) en résolvant le problème

$$\inf_{u \in U_{T,C,M}} J(u) \text{ avec } J(u) = \frac{1}{2}(1 - x(T))^2,$$

et

$$U_{T,C,M} = \left\{ u \in L^\infty([0,T]),\ 0 \le u \le M \text{ p.p. },\ \int_0^T u(t)\,dt = C \right\}.$$

1) Montrer que $0 < x(t) < 1$, pour tout $t \in [0,T]$.

2) On peut vérifier que notre de contrôle optimal est le suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) + u(t)\, g(x(t)), \, t \in [0, T], \\ y'(t) = u(t), \\ x(0) = x_0, \, y(0) = 0, \\ y(T) = C, \\ \inf\limits_{u \in U_{T,C,M}} J(u). \end{cases}$$

2.1) Définir le Hamiltonien associé à ce problème.

2.2) Écrire les équations adjointes.

2.3) Écrire la condition de transversalité $\lambda_1(T)$ et en déduire que $\lambda_1(T) < 0$.

2.4) Vérifier que la fonction $\lambda_2$ est constante sur $[0, T]$.

2.5) Montrer que la fonction $\lambda_1$ est strictement négative sur $[0, T]$.

2.6) Expliciter la condition de minimisation et en déduire que le contrôle optimal $u$ est donné par

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_1(t)\, g(x(t)) + \lambda_2(t) > 0, \\ M \text{ si } \lambda_1(t)\, g(x(t)) + \lambda_2(t) < 0. \end{cases}$$

2.7) Montrer que la fonction $\lambda_2$ est strictement positive sur $[0, T]$.

2.8) On admet l'existence d'une solution optimale $u$ non identiquement nulle et on suppose que la fonction $v \mapsto \dfrac{f(v)}{g(v)}$ est strictement croissante sur $]0, 1[$. Montrer que la stratégie optimale est bang-bang, et plus précisément qu'il existe un unique temps de commutation $t_1 = \frac{C}{M}$ tel que

$$u(t) = \begin{cases} M \text{ si } 0 < t < t_1, \\ 0 \text{ si } t_1 < t < T. \end{cases}$$

Exercice 2 : On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), t \in [s, T] \\ x(s) = \xi, \\ J(s, \xi; u) = \int_s^T (u^2(t) dt + x(T), \end{cases}$$

pour tout $s \in [0, T]$, $T > 0$ fixé, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

1) Écrire l'équation HJB et la condition finale pour la fonction valeur

$$V(s; \xi) = \inf_{u \in L^1([0,T], \mathbb{R})} J(s, \xi; u).$$

2) Résoudre l'équation HJB en cherchant la solution sous la forme $V(s; \xi) = a(s)\xi + b(s)$.

3) En déduire le contrôle optimal comme feedback, la trajectoire optimale et le contrôle optimal.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A. U. : 2021_2022
Module : Contrôle optimal.

Niveau : Première Année Master Biomathématiques et Modélisation.

Corrigé de l'examen final du 29_05_2022.

## Exercice 01 : 13 points.

1) Montrons que $0 < x(t) < 1$, pour tout $t \in [0,T]$.

Supposons qu'il existe un point $t_* \in ]0,T]$ tel que $x(t_*) = 0$.
(voir que $x(0) > 0$).

On considère le problème de Cauchy

$$(Ch\,1) \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) + u(t)\, g(x(t)) \\ x(t_*) = 0. \end{cases}$$

0,75 pts

Le problème (Ch 1) admet deux solutions la solution $x$ et la solution identiquement nulle. Contradiction car le problème de Cauchy (Ch1) admet une unique solution. Par suite, $x(t) > 0$, pour tout $t \in [0, T]$.

De même supposons qu'il existe $t^* \in ]0, T]$ tel que $x(t^*) = 1$ (voir que $x(0) < 1$).

On considère le problème de Cauchy

$$(Ch2) \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) + u(t)\, g(x(t)) \\ x(t^*) = 1. \end{cases}$$

0,75 pts

Le problème (Ch 2) admet deux solutions la solution $x$ et la solution $z \equiv 1$. Contradiction car le problème de Cauchy (Ch 2) admet une unique solution. Par suite $x(t) < 1$, pour tout $t \in [0, T]$.

En conclusion, on a

$$\forall t \in [0, T], \quad 0 < x(t) < 1.$$

2°)

2.1) Le Hamiltonien H est défini par

$$H(x, y, \lambda_1, \lambda_2, u) = \lambda_1(t)\Big(f(x(t)) + u(t)\, g(x(t))\Big) + \lambda_2(t)\, u(t). \quad 1pt$$

2.2) Les équations adjointes

$$\lambda_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, u) \quad 1pt$$

$$= -\lambda_1(t)\Big(f'(x(t)) + u(t)\, g'(x(t))\Big), \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

et $$\lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, \lambda_1, \lambda_2, u) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad 1pt$$

2.3) La condition de transversalité $\lambda_1(T)$.

$$\lambda_1(T) = \lambda_0 \cdot \Psi'(x(T)), \text{ avec } \Psi(x(T)) = \frac{1}{2}(1 - x(T))^2,$$

et $\lambda_0 \in \{0, 1\}$.

1pt

$$= -\lambda_0 (1 - x(T)).$$

3°

Montrons maintenant que $\lambda_1(T) < 0$.

On a,

$$\lambda_1(T) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_0 = 0 \\ x(T) - 1 < 0 \text{ si } \lambda_0 = 1. \end{cases}$$

Pour cela on va vérifier que $\lambda_0 = 1$ (c'est-à-dire le contrôle optimal est normal).

Si $\lambda_0 = 0$, alors $\lambda_1 \equiv 0$ car le problème suivant

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = -\lambda_1(t)\left(f'(x(t)) + u(t)\, g'(x(t))\right), \\ \lambda_1(T) = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution qui est $\lambda_1 \equiv 0$ (voir que $T < +\infty$).

Maintenant, on a

$$H(x, y, \lambda_1, \lambda_2, u) = \lambda_2(t)\, u(t).$$

Comme $\lambda_2(t) = C_2 \in \mathbb{R}^*$ (voir l'équation differentielle satisfaite par $\lambda_2$), alors le contrôle optimal $u$ est donné par

$$u(t) = \begin{cases} M \text{ si } C_2 < 0, \\ 0 \text{ si } C_2 > 0. \end{cases}$$

Si $u(t) = M$, alors comme $C = y(T) = \int_0^T u(s)ds = M.T$,

on obtient une contradiction car $C < M.T$.

De même si $u(t) = 0$, alors on obtient $C = y(T) = \int_0^T u(s)ds = 0$,

on obtient une contradiction car $C > 0$.

(Remarque : On ne peut pas avoir $\lambda_2(t) = 0$, car on obtient $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 0, 0)$, ce qui est en contradiction avec le Principe du maximum de Pontriaguine). 1 pt

En conclusion l'hypothèse $\lambda_0 = 0$ est fausse et par conséquent $\lambda_0 = 1$.

2. ~~1~~4) Comme,

$$\lambda_2'(t) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, T],$$

alors $\lambda_2$ est constante sur $[0, T]$. 0,5 pts

2.5) Montrons que la fonction $\lambda_1$ est strictement négative sur $[0, T]$.

On a,

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = - A(t)\,\lambda_1(t), & t \in [0,T]. \\ \lambda_1(T) < 0, \end{cases}$$

avec $A(t) = f'(x(t)) + u(t)\, g'(x(t))$.

Alors, $$\left( e^{\int_0^t A(s)ds} \lambda_1(t) \right)' = 0.$$

Ce qui donne,
$$e^{\int_0^t A(s)ds} \lambda_1(t) = e^{\int_0^T A(s)ds} \lambda_1(T).$$

1pt

C'st-à-dire,
$$\lambda_1(t) = e^{\int_t^T A(s)ds} \lambda_1(T)$$
$$< 0 \quad \text{car } \lambda_1(T) < 0.$$

2.6) On a,

$$H(x, y, \lambda_1, \lambda_2, u) = \min_{v\in[0,M]} H(x, y, \lambda_1, \lambda_2, v).$$

Ce qui donne,

$$\lambda_1(t)\, u(t)\, g(x(t)) + \lambda_2(t)\, u(t) = \min_{v\in[0,M]} \left(\lambda_1(t) v\, g(x(t)) + \lambda_2(t)\, v\right).$$

C'est-à-dire,

$$\left(\lambda_1(t)\, g(x(t)) + \lambda_2(t)\right) u(t) = \min_{v\in[0,M]} \left(\lambda_1(t)\, g(x(t)) + \lambda_2(t)\right) v.$$

2pts

Alors,

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_1(t)\, g(x(t)) + \lambda_2(t) > 0, \\ M \text{ si } \lambda_1(t)\, g(x(t)) + \lambda_2(t) < 0. \end{cases}$$

2.7) Montrons que la fonction $\lambda_2$ est strictement positive sur $[0, T]$.

Supposons que la fonction $\lambda_2(t) = \alpha$, avec $\alpha \leq 0$ (voir que la fonction $\lambda_2$ est constante).

Comme $g(x(t))>0$ et $\lambda_1(t)<0$, on a

$$\lambda_1(t)\, g(x(t)) + \lambda_2(t) < 0.$$

Par suite d'après la question précédente,

$$u(t) = M.$$

Comme,
$$C = y(T) = \int_0^T u(s)\,ds$$
$$= M\,T,$$

1 pt

on obtient une contradiction car $C < M.T$.

2.8) Pour tout $t \in [0,T]$, on pose

$$\varphi(t) = \lambda_1(t)\, g(x(t)) + \lambda_2(t).$$

Alors,
$$\varphi'(t) = \lambda_1'(t)\, g(x(t)) + \lambda_1(t)\, g'(x(t))\, x'(t) + \lambda_2'(t)$$
$$= -\lambda_1(t)\left(f'(x(t)) + u(t)\, g'(x(t))\right) g(x(t))$$
$$+ \lambda_1(t)\, g'(x(t)).\left(f(x(t)) + u(t)\, g(x(t))\right)$$

$$= -\lambda_1(t)\left(f'(x(t))\,g(x(t)) - g'(x(t))\,f(x(t))\right)$$

$> 0$ car $\lambda_1(t) < 0$, et la fonction $\sigma \mapsto \frac{f(\sigma)}{g(\sigma)}$ est strictement croissante sur $]0,1[$.

Alors la fonction $\varphi$ est strictement croissante et comme on ne peut pas avoir $u=0$ ou $u=M$, alors on a

$$u(t) = \begin{cases} M & \text{si } 0<t<t_1, \\ 0 & \text{si } t_1<t<T. \end{cases}$$

2pts

Déterminons $t_1$.

On a,

$$C = y(T) = \int_0^T u(s)\,ds = \int_0^{t_1} M\,ds = M t_1.$$

Alors,

$$t_1 = \frac{C}{M}.$$

Exercice 2 : 7 pts.

1°) L'équation HJB et la condition finale pour la fonction valeur $V(S;\xi) = \inf_{u \in L^1([0,T],\mathbb{R})} J(S,\xi;u)$

Le Hamiltonien H associé au problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \ t \in [S,T], \\ x(S) = \xi, \\ J(S,\xi;u) = \int_S^T u^2(t)\,dt + x(T), \end{cases}$$

est définie par

$$H(x,\lambda,u) = \lambda.(x+u) + u^2.$$

Le Hamiltonien minimisé est défini par

$$\begin{aligned} H_{min}(x,\lambda) &= \inf_{u \in \mathbb{R}} H(x,\lambda,u) \\ &= \inf_{u \in \mathbb{R}} \left(\lambda.(x+u) + u^2\right) \\ &= H\left(x,\lambda,-\frac{\lambda}{2}\right) \text{ avec } \tilde{u} = -\frac{\lambda}{2} \text{ comme} \end{aligned}$$

unique minimiseur.

$$= \lambda.\left(x-\frac{\lambda}{2}\right)+\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2$$

$$= \lambda.x-\frac{\lambda^2}{4}.$$

Alors l'équation HJB avec la condition finale sont données par

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s}(s;\xi)+H_{min}\left(\xi,\ \frac{\partial V}{\partial \xi}(s;\xi)\right)=0, \\ V(T;\xi)=\xi. \end{cases}$$

2pts

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s}(s;\xi)+\xi.\frac{\partial V}{\partial \xi}(s;\xi)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}(s;\xi)\right)^2=0 \\ V(T;\xi)=\xi. \end{cases}$$

2°) Résolvons l'équation HJB en cherchant la solution sous la forme $V(s;\xi)=a(s)\xi+b(s)$.

On a, $\frac{\partial V}{\partial s}(s;\xi)=a'(s)\xi+b'(s)$ et $\frac{\partial V}{\partial \xi}(s,\xi)=a(s)$.

Alors d'après la question précédente, on a

$$\begin{cases} a'(s)\xi + b'(s) + a(s)\xi - \dfrac{a^2(s)}{4} = 0 \\ a(T)\xi + b(T) = \xi. \end{cases}$$

Ce qui donne,

$$\begin{cases} a'(s) + a(s) = 0 \\ a(T) = 1, \end{cases} \qquad (*).$$

et

$$\begin{cases} b'(s) - \dfrac{a^2(s)}{4} = 0 \\ b(T) = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

D'après $(*)$, on a

$$a(s) = e^{T-s},$$

et par suite d'après $(**)$, on obtient

$$\int_s^T b'(y)\,dy = \frac{1}{4}\int_s^T a^2(y)\,dy$$

C'est-à-dire,

$$-b(s) = \frac{e^{2T}}{4} \int_s^T e^{-2y}\, dy$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{e^{2(T-s)}}{8}.$$

C'est-à-dire,

$$b(s) = \frac{1 - e^{2(T-s)}}{8}.$$

2pts

Par suite,

$$V(s;\xi) = e^{T-s}\cdot\xi + \frac{1 - e^{2(T-s)}}{8}.$$

3°)

3.1) Le contrôle optimal comme feedback.

$$u(s;\xi) = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial V}{\partial \xi}(s;\xi)$$

1pt

$$= -\frac{e^{T-s}}{2}.$$

3.2) La trajectoire optimale.

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) + u^*(t), \\ x^*(0) = x_0. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) - \frac{e^{T-t}}{2}, \\ x^*(0) = x_0. \end{cases}$$

Alors,

$$\left(e^{-t} x^*(t)\right)' = -\frac{e^{T-2t}}{2}$$

Ce qui donne,

$$e^{-t} x^*(t) - x_0 = -\frac{e^T}{2}\left(-\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{T-2t} - e^T}{4}$$

C'est-à-dire, $$x^*(t) = x_0 e^t + \frac{e^{T-t} - e^{T+t}}{4}$$

1pt

3.3) Le contrôle optimal

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) - x^*(t)$$

1pt

$$= -\frac{e^{T-t}}{2}.$$