Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Faculté des Sciences**
Département de Mathématiques **Master I : Biomathématiques et Modélisation**
Année 2021-2022 **Étude Math Science vivant**

Examen final II

Exercice 1 (8pts)

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \ \ x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où f est une fonction suffisamment régulière.

Pour ce problème on propose le schéma aux différences finies suivant

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) = f_i, \ \ i = 1,...,N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

où $f_i = f(x_i)$. Posons $F_h = (f_1, f_2, ..., f_N)^t$ et $U_h = (u_1, u_2, ..., u_N)^t$.

1- Montrer que si $F_h \geq 0$ alors $U_h \geq 0$.

2- En déduire l'existence et l'unicité de la suite U_h.

Exercice 2 (4pts)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + (v(x)u(x))' = f(x), \ \ x \in (0,1), \\ \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où $f \in C([0,1];\mathbb{R})$, et $v \in C^1([0,1];\mathbb{R}^*)$.
Proposer un schéma aux différences finies pour le problème (2).

Exercice 3 (8pts)

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \alpha^2 u_{xx}(t,x) = 0, \ \ x \in (0,1), \ \ t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et u_0 est une fonction suffisamment régulières.
Pour ce problème on propose le schéma aux différences finies suivant

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{k} + \dfrac{\alpha^2}{h^2}(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}) = 0, \ \ i = 1,...,N, \ \ \ n = 1,...,M, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1,...,N, \\ u_0^{(n)} = u_{N+1}^{(n)} = 0, \quad n = 1,...,M. \end{cases} \tag{4}$$

1- Montrer que le schéma (4) est consistant.

2- Sous quelle condition on a $\min\limits_{i=1,...N} u_i^{n+1} \geq \min\limits_{i=1,...N} u_i^n$ pour quel que soit $n = 0,...,N$. (Justifier)

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Faculté des Sciences**
Département de Mathématiques **Master I : Biomathématiques et Modélisation**
Année 2021-2022 **Étude Math Science Vivant**

Correction de l'examen final 2

Exercice 1 (8pts)

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \ \ x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où f est une fonction suffisamment régulière.

Pour ce problème on propose le schéma aux différences finies suivant

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) = f_i, \ \ i = 1, ..., N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

où $f_i = f(x_i)$. Posons $F_h = (f_1, f_2, ..., f_N)^t$ et $U_h = (u_1, u_2, ..., u_N)^t$.

1- Montrer que si $F_h \geq 0$ alors $U_h \geq 0$.

2- En déduire l'existence et l'unicité de la suite U_h.

Correction de l'exercice 1

1- Soit $p = \min\{i = 1, ..., N; u_i = \min\limits_{j=1,...,N} u_j\}$ **(1pt)**

Alors u_p vérifie,

$$\frac{1}{h^2}(u_p - u_{p-1}) + \frac{1}{h^2}(u_p - u_{p+1}) \geq 0. \tag{2}$$

Supposons maintenant que $p = 2, ..., N-1$, alors l'inégalité (2) est impossible, car par la définition de p on a $u_p - u_{p-1} < 0$, $u_p - u_{p+1} \leq 0$. **(2pts)**

A présent, si $p = 1$ on a

$$\frac{1}{h^2}(u_1 - u_0) + \frac{1}{h^2}(u_1 - u_2) \geq 0. \tag{3}$$

Puisque $u_1 - u_2 \leq 0$ alors on a nécessairement $u_1 \geq u_0 = 0$. **(1pt)**

Si $p = N$ alors on a

$$\frac{1}{h^2}(u_N - u_{N-1}) + \frac{1}{h^2}(u_N - u_{N+1}) \geq 0.$$

On réécrit cette inégalité comme suit

$$\frac{1}{h^2}(u_N - u_{N-1}) + \frac{1}{h^2}(u_N - u_{N+1}) \geq 0.$$

Donc puisque $u_N - u_{N-1} < 0$ alors on a nécessairement $u_N \geq u_{N+1} = 0$. **(1pt)**

En conclusion $u_i \geq 0$ pour tout $i = 1, ..., N$.

2- On écrit le système (1) comme suit, $A_h U_h = F_h$. Supposons à présent que $A_h U_h = 0$ alors $A_h U_h \geq 0$ d'après ce qui précède $U_h \geq 0$. D'autre part $A_h U_h = 0$ implique aussi que $A_h U_h \leq 0$ où bien $A_h(-U_h) \geq 0$ toujours de ce qui précède on trouve $-U_h \geq 0$ ou bien $U_h \leq 0$. En combinant les deux résultats on trouve que $U_h = 0$. On conclut que A_h est inversible et $U_h = A_h^{-1} F_h$ **(3pts)**

Exercice 2 (4pts)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) + (v(x)u(x))' = f(x), \ \ x \in (0,1), \\ \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

où $f \in C([0,1];\mathbb{R})$, et $v \in C^1([0,1];\mathbb{R})$.
Proposer un schéma aux différences finies pour le problème (4) puis montrer qu'il est consistant.

Correction de l'exercice 2

Le schéma est donné comme suit (pour plus de détail voir cours)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) + v_i \times \begin{cases} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} & \text{si } v_i > 0 \\ \frac{u_{i+1} - u_i}{h} & \text{si } v_i < 0 \end{cases} + v'(x_i)u_i = 0, \ \ i = 1, ..., N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0, \end{cases}$$

Exercice 3 (8pts)

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \alpha^2 u_{xx}(t,x) = 0, \ \ x \in (0,1), \ \ t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et u_0 sont deux fonctions suffisamment régulières.

Pour ce problème on propose le schéma aux différences finies suivant

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{k} + \dfrac{\alpha^2}{h^2}(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}) = 0, \ \ i = 1, ..., N, \quad n = 1, ..., M, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, ..., N, \\ u_0^{(n)} = u_{N+1}^{(n)} = 0, \quad n = 1, ..., M. \end{cases} \tag{6}$$

1- Montrer que le schéma (6) est consistant.

2- Sous quelle condition on a $\min\limits_{i=1,...N} u_i^{n+1} \geq \min\limits_{i=1,...N} u_i^n$ pour quel que soit $n = 0, ..., N$.

Correction de l'exercice 3

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \alpha^2 u_{xx}(t,x) = 0, \ \ x \in (0,1), \ \ t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et u_0 est une fonction suffisamment régulière.

Pour ce problème on propose le schéma aux différences finies suivant

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}}{k} + \dfrac{\alpha^2}{h^2}(2u_i^{(n)} - u_{i-1}^{(n)} - u_{i+1}^{(n)}) = 0, \;\; i = 1,...,N, \quad n = 1,...,M, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1,...,N, \\ u_0^{(n)} = u_{N+1}^{(n)} = 0, \quad n = 1,...,M. \end{cases} \tag{7}$$

1- Montrer que le schéma (7) est consistant.

Soit l'erreur de consistance suivante : pour chaque $n = 0,...,M$ et $i = 1,...,N$ on a

$$R_i^n = \tilde{R}_i^n + \hat{R}_i^n,$$

avec

$$\tilde{R}_i^n = \frac{u(t_{n+1},x_i) - u(t_n,x_i)}{k} - u_t(t_n,x_n), \;\; \textbf{(1pt)}$$

et

$$\hat{R}_i^n = \alpha^2\big(\frac{2u(t_n,x_i) - u(t_n,x_{i-1}) - u(t_n,x_{i+1})}{h^2} + u_{xx}(t_n,x_i)\big). \;\; \textbf{(1pt)}$$

Sous la régularité de la solution, un développement de Taylor au voisinage de (t_n,x_n) donne

$$u(t_{n+1},x_i) - u(t_n,x_i) = ku_t(t_n,x_n) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(\xi_n,\theta_n), \;\; \textbf{(1pt)} \tag{8}$$

on a aussi

$$u(t_n,x_{i+1}) - u(t_n,x_i) = hu_x(t_n,x_n) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n,x_n) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n,x_n) + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(s_n,r_n), \;\; \textbf{(1pt)} \tag{9}$$

et

$$u(t_n,x_{i-1}) - u(t_n,x_i) = -hu_x(t_n,x_n) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(t_n,x_n) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(t_n,x_n) + \frac{h^4}{24}u_{xxxx}(\tilde{s}_n,\hat{r}_n). \;\; \textbf{(1pt)} \tag{10}$$

En soustrayant (9) de (10), et en ajoutant (8) on obtient

$$|R_i^n| \leq C(k+h^2), \quad \forall\, n = 1,...M, \;\; i = 0,...,N.$$

où C ne dépend que de la solution u.

2- Sous quelle condition on a $\min\limits_{i=1,...N} u_i^{n+1} \geq \min\limits_{i=1,...N} u_i^n$ pour quel que soit $n = 0,...,N$.

On réécrit (7) comme

$$u_i^{(n+1)} = (1-2\lambda)u_i^{(n)} + \lambda u_{i+1}^{(n)} + \lambda u_{i-1}^{(n)}, \;\; \textbf{(1pt)}$$

avec $\lambda = \dfrac{\alpha^2 k}{h^2}$. A présent si $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} u_i^{(n+1)} &\geq (1-2\lambda)\min_{i=1,...N} u_i^{(n)} + \lambda \min_{i=1,...N} u_i^{(n)} + \lambda \min_{i=1,...N} u_i^{(n)}, \\ &= \min_{i=1,...N} u_i^{(n)}. \;\; \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\min_{i=1,...N} u_i^{(n+1)} \geq \min_{i=1,...N} u_i^{(n)}, \quad \text{pour } \frac{\alpha^2 k}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \;\; \textbf{(1pt)}$$