Université de Tlemcen A.U.2021/2022
Département de Mathématiques

Examen Final
de
Méthodes de résolution des problèmes elliptiques

Exercice1(10pts)
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,un ouvert borné et $p \geq 2$.

1. 1pt Montrer la convexité de la fonctionnelle Φ définie par

$$\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}; \Phi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$

2. 1,5pt En déduire la monotonie de l'opérateur $(-\Delta_p)$

3. 1,5pt Soit $a_i \in \mathbb{R}$,montrer la monotonie de l'opérateur linéaire,

$$A_i : W_0^{1,p}(\Omega) \underset{\rightsquigarrow}{\to} W^{-1,q}(\Omega)$$
$$u \qquad\qquad a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

4. Soient a un vecteur constant de $\mathbb{R}^N$, et $g \in L^2(\Omega)$. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) + a.\nabla u(x) = g(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

1pt Donner la définition de solution faible de (1)

5. 2pts Peut on déterminer la solution de (1) comme point critique d'une fonctionnelle. Justifier votre réponse.

6. 3pts Quelle méthode peut on appliquer pour montrer l'existence et l'unicité de solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$du problème (1).

Exercice2(10 pts)

1. 4pts Pour Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$ et $g \in L^2(\Omega)$,montrer par approche variationnelle l'existence et l'unicité de solution au problème linéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + u = g, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

2. 6pts Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$telle que $\|f\|_\infty = a < +\infty$, montrer par la méthode de point fixe l'existence de solution pour le problème semi-linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(u), & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} . \tag{3}$$