Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Master : Biomathématiques M1
Module: Théorie de bifurcation
AU: 2021/2022, Avril 2022.

Barème et corrigé du contrôle continu, Durée 1h30

Exercice 1: **(10 pts)** Soit le système

$$S_\mu \quad \left\{ \begin{array}{c} x' = -y + \mu x + xy^2 \\ y' = x + \mu y - x^2 \end{array} \right. \qquad \mu \in R^+ \text{ un paramètre}$$

a) Montrer que le système (S_μ) admet une bifurcation de Hopf au voisinage de $(0,0)$.

b) Donner la nature de cette bifurcation.

Solution:

la matrice jacobienne est (**01.5 pts)**

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

les valeurs propores sont(**02 pts)**

$$\lambda_1 = \mu + i, \ \lambda_2 = \mu - i$$

les conditions d'une bifurcation de Hopf sont réunies.(**02 pts)**

b) .Un calcul simple de l'indice de Marsden McCraken donne que la bifurcation est sous critique.**04.5 pts)**

Exercice2: **(10 pts)** Soit l'équation

$$y'' = \left(\alpha^2 \cos y - \beta\right) \sin y, \tag{S}$$

où α, β sont deux paramètres réels.

Etudier la nature de bifurcation .

Solution:le système peut s'écrire (**01.5 pts)**

$$\left\{ \begin{array}{c} \theta' = \eta \\ \eta' = \left(\alpha^2 (\cos\theta - \beta\right) \sin\theta \end{array} \right.$$

On remarque que $(0,0)$ est un point d'équilibre .La Jacobienne donne **(0.5 pt)**

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 - \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha < \sqrt{\beta}$, alors les valeurs propres (**01 pts)** sont

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\beta - \alpha^2}$$

et si $\alpha > \sqrt{\beta}$, alors les valeurs propres **(01 pts)** sont

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

on en déduit que si $\alpha < \sqrt{\beta}$, le seul point d'équilibre est $(0,0)$, et on peut montrer qu'il est satble (**01.5 pts**).Si$\alpha > \sqrt{\beta}$, il y a naissance de 2 autres points d'équilibres **(01.5 pts)** $\left(\pm ar\cos\frac{1}{\alpha}\sqrt{\beta}, 0\right)$.

Conclusion.Nous obtenons une bifurcation fourche **(01.5 pts)** .Diagramme de bifurcation (**01 .5pts**)