

Contrôle continu II

Exercice 1 (13pts)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u(k - u), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1)$$

où k est une constante strictement positive.

On cherche la solution de (1) dans l'espace de Banach $X := C([0, T]; W_0^{1,2}(0, 1))$,

- 1- Donner l'expression de la norme usuelle associée à cet espace. **(1pt)**
- 2- Donner la définition de la solution de (1) dans l'espace X . **(1pt)**
- 3- Donner le problème stationnaire associé au problème (1), puis déduire le(s) état(s) stationnaire(s) constant(s), **(2pts)**.
- 4- Linéariser le problème (1) au voisinage d'un état stationnaire quelconque $u_*(x)$, **(2pts)**.
- 5- Étudier la stabilité locale de(s) état(s) stationnaire(s) constant(s), **(7pts)**.

Exercice 2 (7pts)

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \mu(t) - \beta(t)x(t)y(t) + \phi y(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y'(t) = \beta(t)x(t)y(t) - \phi y(t), & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2)$$

avec

$$\begin{cases} x(0) = x(T), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y(T), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \beta(t + T) = \beta(t), & t \in \mathbb{R}, \\ \mu(t + T) = \mu(t), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

avec $\int_0^T \mu(\sigma) d\sigma = 0$. Supposons aussi que toutes les constantes sont strictement positives et que $\mu, \beta \in C(\mathbb{R})$.

- 1- Linéariser le problème (2) au voisinage d'une solution T -périodique $(x^*(t), y^*(t))$, **(2pts)**.
- 2- Soit $(x^*(t), 0)$ une solution T -périodique du problème (2). Déterminer $x^*(t)$ puis vérifier qu'elle est T -périodique, **(2pts)**.

3- A présent supposons qu'on a $\beta(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi = 0$, $\mu(t) = \cos(t)$, $x^*(0) = 0$ et $T = 2\pi$.

Calculer explicitement la matrice fondamentale du problème linéarisé de (2) au voisinage de $(x^*(t), 0)$, (**3pts**).

Correction Contrôle continu II

Exercice 1 (13pts)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u(k - u), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1)$$

où k est une constante strictement positive.

On cherche la solution de (1) dans l'espace de Banach $X := C([0, T]; W_0^{1,2}(0, 1))$,

1- Donner l'expression de la norme usuelle associée à cet espace.

2- Donner la définition de la solution de (1) dans l'espace X .

3- Donner le problème stationnaire associé au (1), puis déduire le(s) état(s) stationnaire constants, **(2pts)**.

4- Linéariser le problème (1) au voisinage d'un état stationnaire quelconque $u_*(x)$, **(2pts)**.

5- Étudier la stabilité locale de(s) état(s) stationnaires constants, **(7pts)**.

Correction de l'exercice 1 (13pts)

1- La norme est donnée comme suit

$$\|u\|_X = \sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| dx.$$

2- La solution de (1) est définie,

$$\int_0^T \int_0^1 u(x, t) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) dx dt + \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) dx dt + \int_0^T \int_0^1 u(x, t) (k - u(x, t)) v(x, t) dx dt = 0,$$

pour tout $v \in C_K^1((0, T) \times (0, 1))$.

3- Le problème stationnaire est donné comme suit **(1pt)**

$$\begin{cases} u_*''(x) = u_*(x)(k - u_*(x)), & x \in (0, 1), \\ u_*(0) = u_*(1) = 0, \end{cases}$$

Il y'a un seul état stationnaire constant a savoir, $u_* \equiv 0$. **(1pt)**

4- Posons $v(x, t) = u(x, t) - u_*(x)$ un petit calcul donne lieu à **(2pts)**

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = v(x, t)(k - 2u_*(x)), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, & t > 0, \\ v(x, 0) = u_0(x) - u_*(x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2)$$

5- Cherchons les solutions **non triviales** de la forme $v(x, t) = e^{\lambda t} \phi(x)$. En remplaçant dans (2) on a **(2pts)**

$$\begin{cases} (\lambda + k)\phi(x) - \phi''(x) = 0 & x \in (0, 1), \\ \phi(0) = \phi(1) = 0. \end{cases}$$

A présent nous allons étudier 3 cas

Cas 1: $\lambda = -k$ alors l'équation devient $-\phi''(x) = 0$ alors $\phi(x) = ax + b$ en utilisant les conditions aux bords on trouve $\phi \equiv 0$ **(1pt)**

Cas 2: $\lambda > -k$ Dans ce cas $\phi(x) = ae^{\sqrt{\lambda+k}x} + be^{-\sqrt{\lambda+k}x}$, $\phi(0) = 0$ implique que $b = -a$ et donc

$$\phi(x) = a \left(e^{\sqrt{\lambda+k}x} - e^{-\sqrt{\lambda+k}x} \right).$$

D'autre part $\phi(1) = 0$ donne soit $\phi \equiv 0$ ou bien

$$e^{\sqrt{\lambda+k}} = e^{-\sqrt{\lambda+k}},$$

ceci est impossible. **(1pts)**

Cas 3: $\lambda < -k$ Alors ϕ est donnée comme suit

$$\phi(x) = a \cos(\sqrt{-k-\lambda}x) + b \sin(\sqrt{-k-\lambda}x) \quad \textbf{(1pt)}.$$

En utilisant les conditions aux bords on a $\phi(0) = 0$ implique que $\phi(x) = b \sin(\sqrt{-k-\lambda}x)$, $\phi(1) = 0$ implique que $b \sin(\sqrt{-k-\lambda}) = 0$ **(1pt)** dans ce cas on a soit $b = 0$ et donc $\phi \equiv 0$, ou bien $\sqrt{-k-\lambda} = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Ce qui conclut que $\lambda = -k - (n\pi)^2$, $n \in \mathbb{Z}$ **(1pt)**. Finalement puisque toutes les valeurs propres sont positives alors l'état stationnaire 0 est localement stable **(1pt)**.

Exercice 2 (7pts)

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \mu(t) - \beta(t)x(t)y(t) + \phi y(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y'(t) = \beta(t)x(t)y(t) - \phi y(t), & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3)$$

avec

$$\begin{cases} x(0) = x(T), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y(T), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \beta(t+T) = \beta(t), & t \in \mathbb{R}, \\ \mu(t+T) = \mu(t), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

avec $\int_0^T \mu(\sigma) d\sigma = 0$. Supposons aussi que toutes les constantes sont strictement positives et $\mu, \beta \in C(\mathbb{R})$.

1- Linéariser le problème (3) au voisinage d'une solution T -périodique $(x^*(t), y^*(t))$, **(2pts)**.

2- Soit $(x^*(t), 0)$ une solution T -périodique du problème (3). Déterminer $x^*(t)$ puis vérifier qu'elle est T -périodique, **(2pts)**.

3- A présent supposons qu'on a $\beta(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi = 0$, $\mu(t) = \cos(t)$, $x^*(0) = 0$ et $T = 2\pi$.

Calculer explicitement la matrice fondamentale du problème linéarisé de (3) au voisinage de $(x^*(t), 0)$, **(3pts)**.

Correction de l'exercice 2

1- Posons $\tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$, $\tilde{y}(t) = y(t) - y^*(t)$. La linéarisation du problème (3) au voisinage d'une solution T -périodique $(x^*(t), y^*(t))$ est donnée comme suit **(2pts)**.

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = -\beta(t)y^*(t)\tilde{x}(t) - \beta(t)x^*(t)\tilde{y}(t) + \phi\tilde{y}(t), \\ \tilde{y}'(t) = \beta(t)y^*(t)\tilde{x}(t) + \beta(t)x^*(t)\tilde{y}(t) - \phi\tilde{y}(t), \end{cases} \quad (4)$$

2- En remplaçant $(x^*(t), 0)$ dans le problème (3) on a $x^{*'}(t) = \mu(t)$ ou bien

$$x^*(t) = x^*(0) + \int_0^t \mu(\sigma) d\sigma, \quad \textbf{(1pt)}.$$

Remarquer que

$$\begin{aligned} x^*(t+T) - x^*(t) &= \int_t^{t+T} \mu(\sigma) d\sigma, \\ &= \int_0^{t+T} \mu(\sigma) d\sigma - \int_0^t \mu(\sigma) d\sigma, \\ &= \int_{-T}^t \mu(\sigma+T) d\sigma - \int_0^t \mu(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

Posons $\sigma_1 = \sigma + T$, il suit, de μ T -périodique,

$$\begin{aligned} x^*(t+T) - x^*(t) &= \int_{-T}^0 \mu(\sigma) d\sigma, \\ &= \int_{-T}^0 \mu(\sigma+T) d\sigma, \\ &= \int_0^T \mu(\sigma_1) d\sigma_1, \\ &= 0, \quad \textbf{(2pts)}. \end{aligned}$$

3- Matrice fondamentale principale

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = -\beta(t)x^*(t)\tilde{y}(t) + \phi\tilde{y}(t), \\ \tilde{y}'(t) = \beta(t)x^*(t)\tilde{y}(t) - \phi\tilde{y}(t), \end{cases} \quad (5)$$

On considère $Z(t)$ une matrice fondamentale principale du problème (5), $Z(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$
avec $Z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors on a

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\beta(t)x^*(t)y_1(t) + \phi y_1(t), \\ y_1'(t) = \beta(t)x^*(t)y_1(t) - \phi y_1(t), \end{cases}$$

avec

$$x_1(0) = 1, \quad y_1(0) = 0.$$

Un calcul direct donne

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\beta(t)x^*(t)y_1(t) + \phi y_1(t), \\ y_1(t) = 0, \end{cases}$$

et donc $(x_1(t), y_1(t)) = (1, 0)$ pour quelque soit $t \in \mathbb{R}$, **(1pt)**.

Maintenant puisque $\mu(t) = \cos(t)$ alors $x^*(t) = x^*(0) + \sin(t)$. D'autre part on a pour $\phi = 0$ et $\beta(t) = 1$

$$\begin{cases} x_2'(t) = -x^*(t)y_2(t), \\ y_2'(t) = x^*(t)y_2(t), \end{cases}$$

avec

$$x_2(0) = 0, \quad y_2(0) = 1.$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= e^{\int_0^t x^*(\sigma) d\sigma}, \\ &= e^{\int_0^t \sin(\sigma) d\sigma}, \\ &= e^{1-\cos(t)}. \end{aligned}$$

En plus on a

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\int_0^t \sin(\sigma) e^{1-\cos(\sigma)} d\sigma, \\ &= 1 - e^{1-\cos(t)}. \end{aligned}$$

En conclusion la matrice fondamentale principale est donnée comme suit $Z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{1-\cos(t)} \\ 0 & e^{1-\cos(t)} \end{pmatrix}$, **(2pts)**.