Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2021-2022
Module : Contrôle optimal
Date : 14-04-2022

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

CONTRÔLE CONTINU.

Exercice : On considère un robot articulé à un degré de liberté, avec une constante de rigidité $\rho > 0$ et un amortissement $\alpha \geq 0$. La dynamique est décrite par l'EDO durant un horizon temporel T

$$\eta.\frac{d^2q}{dt^2} + \alpha.\frac{dq}{dt} + \rho.q = \rho.\theta + \alpha.\frac{d\theta}{dt}, 0 < t < T, \tag{1}$$

où q est la position de la liaison, θ est la position du moteur et $\eta > 0$ est l'inertie de la liaison. Le but de cet exercice est de contrôler la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ afin d'atteindre certains objectifs.

1. En posant $x_1 = \theta - q$, $x_2 = \frac{dq}{dt}$ et la variable de contrôle $u = \frac{d\theta}{dt}$, montrer que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est solution du problème linéaire contrôlé suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + u(t), \ 0 < t < T, \\ x_2'(t) = \omega_0^2.x_1(t) + 2\beta\omega_0.(-x_2(t) + u(t)), 0 < t < T, \end{cases} \tag{2}$$

avec les constantes ω_0 et β à déterminer.

On suppose que l'état initial $X(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est une donnée.

2. Soit $T > 0$ un temps final fixé. On souhaite maximiser la vitesse de liaison x_2 à l'instant T c'est-à-dire minimiser le coût

$$-x_2(T).$$

De plus, nous supposons que le contrôle u est contraint par la relation :

$$u_{\min}(t) \leq u(t) \leq u_{\max}(t), \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Appliquer le principe du maximum de Pontryagin à ce problème de contrôle optimal :

2.1) Ecrire le Hamiltonien du problème.

2.2) Ecrire les équations extrémales.

2.3) Ecrire les conditions de transversalité $\lambda_1(T)$ et $\lambda_2(T)$.

2.4) Expliciter la condition de minimisation et en déduire que le contrôle optimal u est donné par

$$u(t) = \begin{cases} u_{\min}(t) \text{ si } f(t) > 0, \\ u_{\max}(t) \text{ si } f(t) < 0, \end{cases}$$

où $f(t) = \lambda_1(t) + 2\beta\omega_0.\lambda_2(t)$.

2.5) Considérons le cas particulier de $\beta = 0$.

2.5.1) Montrer que $f(t) = \frac{\sin(\omega_0(T-t))}{\omega_0}$.

2.5.2) Application : Tracer le graphe du contrôle optimal u sur l'intervalle $[0,T]$ avec $T=2\pi$, $\omega_0=4$, $u_{\min}(t)=t$ et $u_{\max}(t)=2t$.

3. On se place dans le cas où $\beta=0$ et en horizon infini ($T=+\infty$) avec la fonction coût

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(x_2^2(s)+u^2(s)\right)ds=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(X^t(s).W.X(s)+u(s).U.u(s))ds,$$

avec $W=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $U=1$.

3.1) Mettre le système (2) sous la forme $X'(t)=A.X(t)+B.u(t)$.

3.2) Montrer que la matrice $E=\begin{pmatrix}a & 1-\sqrt{2}\\ 1-\sqrt{2} & b\end{pmatrix}$ avec $a=-\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\omega_0$ et $b=\dfrac{\sqrt{2}}{\omega_0^2}a$ est solution de l'équation de Riccati stationnaire suivante

$$A^tE+EA+EBU^{-1}B^tE=W.$$

3.3) En déduire l'expression du contrôle optimal en foction de X.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A. U. : 2021-2022
Module : Contrôle optimal.

Niveau : Première Année Biomathématiques et Modélisation.

Corrigé du contrôle continu

Exercice

1°) On a,

$$x_1'(t) = \theta'(t) - q'(t)$$
$$= u(t) - x_2(t)$$
$$= -x_2(t) + u(t).$$

De même, on a

$$x_2'(t) = q''(t)$$
$$= \frac{\rho}{\eta}\theta(t) + \frac{\alpha}{\eta}\theta'(t) - \frac{\alpha}{\eta}q'(t) - \frac{\rho}{\eta}q(t)$$
$$= \frac{\rho}{\eta}(\theta(t) - q(t)) + \frac{\alpha}{\eta}(\theta'(t) - q'(t))$$

$$= \frac{\rho}{\eta} x_1(t) + \frac{\alpha}{\eta}\left(u(t) - x_2(t)\right)$$

$$= w_0^2\, x_1(t) + 2\beta w_0\left(-x_2(t) + u(t)\right),$$

avec $w_0 = \sqrt{\frac{\rho}{\eta}}$ et $\beta = \frac{\alpha}{2 w_0 \eta} = \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho\eta}}$.

2°)

2.1°) Le Hamiltonien du problème.

On a,

$$H(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u)$$

$$= \lambda_1(t)\left(-x_2(t) + u(t)\right) + \lambda_2(t)\left(w_0^2\, x_1(t) + 2\beta w_0\left(-x_2(t) + u(t)\right)\right).$$

2.2°) Les équations extrémales.

$$\lambda_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u)$$

$$= -w_0^2 \cdot \lambda_2(t),$$

et

$$\lambda_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u)$$

$$= \lambda_1(t) + 2\beta w_0 \cdot \lambda_2(t).$$

2.3°) Les conditions de transversalité $\lambda_1(T)$ et $\lambda_2(T)$.

$$\lambda_1(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(x(T)), \quad \text{avec } \Psi(x) = -x_2.$$

$$= 0,$$

et

$$\lambda_2(T) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}(x(T))$$

$$= -1.$$

2.4°) On a,

$$H(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, u) = \min_{\vartheta \in [u_{min}, u_{max}]} H(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \vartheta).$$

Ce qui donne,

$$\left(\lambda_1(t) + 2\beta w_0 \cdot \lambda_2(t)\right) u(t) = \min_{\vartheta \in [u_{min}, u_{max}]} \left(\lambda_1(t) + 2\beta w_0 \cdot \lambda_2(t)\right)\vartheta.$$

C'est-à-dire,

$$u(t) = \begin{cases} u_{min}(t) \text{ si } f(t) > 0, \\ u_{max}(t) \text{ si } f(t) < 0, \end{cases}$$

avec $f(t) = \lambda_1(t) + 2\beta w_0 \cdot \lambda_2(t)$

2.5°) On suppose $\beta = 0$.

2.5.1°) Montrons que $f(t) = + \dfrac{\sin(w_0(T-t))}{w_0}$.

Pour ce cas, on a

$$f(t) = \lambda_1(t), \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Maintenant on va donner l'expression explicite de λ_1.

D'après les questions 2.3°) et 2.4°) et sachant que $\beta = 0$, on a

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = -w_0^2 \lambda_2(t), \\ \lambda_2'(t) = \lambda_1(t) \\ \lambda_1(T) = 0, \ \lambda_2(T) = -1. \end{cases}$$

Alors, on a

$$\lambda_1''(t) + w_0^2 \lambda_1(t) = 0.$$

Ce qui donne,

$$\lambda_1(t) = C_1 \cos(w_0 t) + C_2 \sin(w_0 t),$$

avec C_1 et C_2 deux constantes réelles.

Pour déterminer C_1 et C_2 on va utiliser les conditions terminales $\lambda_1(T) = 0$ et $\lambda_1'(T) = -1$.

On a,

$$\begin{cases} \lambda_1(T) = 0 \\ \lambda_1'(T) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 \cos(w_0 T) + C_2 \sin(w_0 T) = 0 \\ -C_1 . w_0 . \sin(w_0 T) + C_2 . w_0 . \cos(w_0 T) = -1. \end{cases}$$

Le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} \cos(w_0 T) & \sin(w_0 T) \\ -w_0 \sin(w_0 T) & w_0 \cos(w_0 T) \end{vmatrix}$

$$= w_0 \neq 0.$$

Alors,

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(w_0 T) \\ -1 & w_0 \cos(w_0 T) \end{vmatrix}}{w_0}$$

$$= \frac{\sin(w_0 T)}{w_0},$$

et

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos(w_0 T) & 0 \\ -w_0 \sin(w_0 T) & -1 \end{vmatrix}}{w_0} = -\frac{\cos(w_0 T)}{w_0}.$$

Par suite,

$$f(t) = \lambda_1(t)$$

$$= \frac{\sin(w_0 T)}{w_0} \cos(w_0 t) - \frac{\cos(w_0 T)}{w_0} \sin(w_0 t)$$

$$= \frac{\sin(w_0 T - w_0 t)}{w_0}$$

$$= \frac{\sin(w_0 (T - t))}{w_0}.$$

2.5.2°)

On a,

$$f(t) = \frac{\sin(4(2\pi - t))}{4}$$

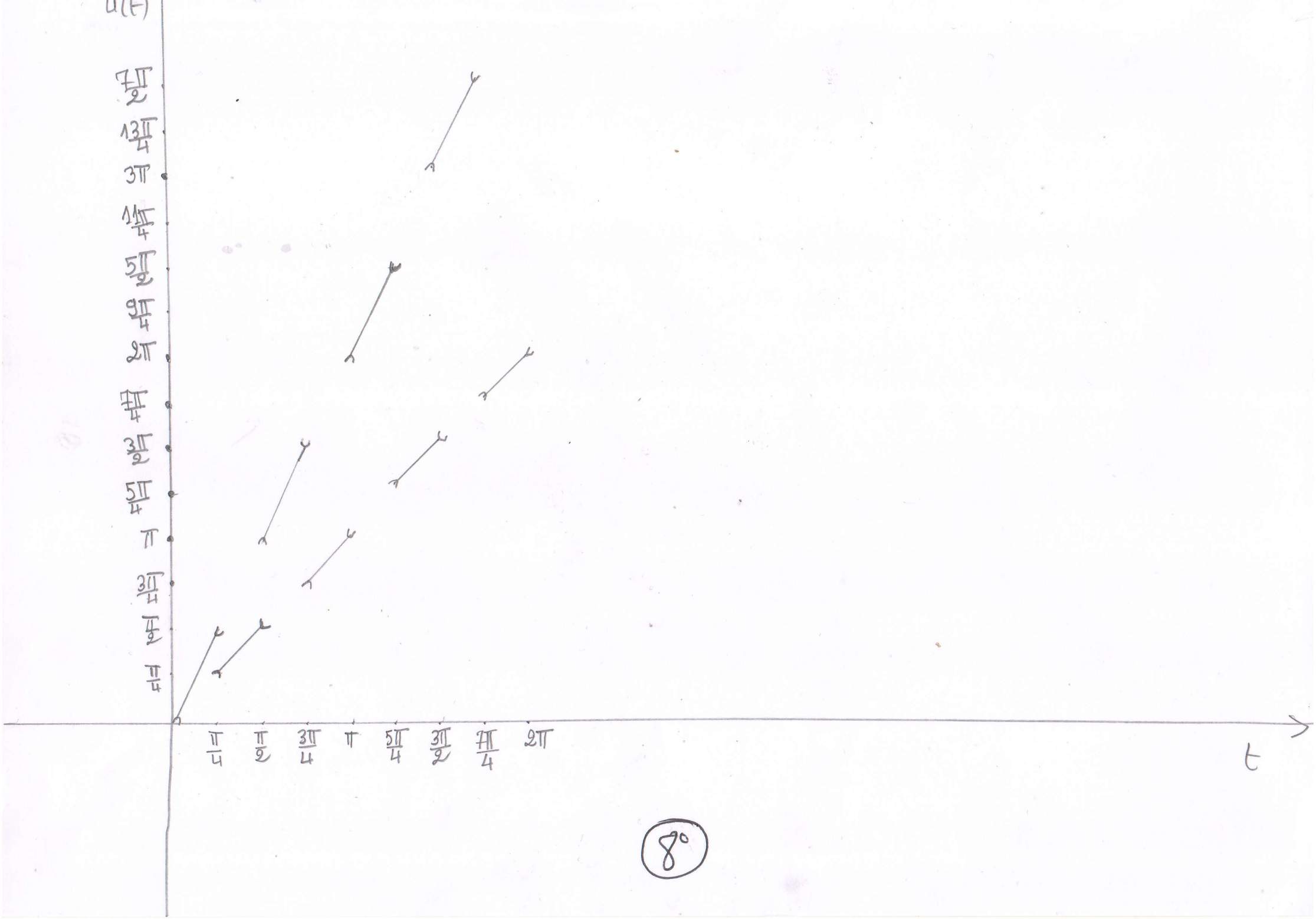
$$= -\frac{\sin(4t)}{4}.$$

Alors,

$$u(t) = \begin{cases} t \text{ si } \sin(4t) < 0, \ t \in (0, 2\pi), \\ 2t \text{ si } \sin(4t) > 0, \ t \in (0, 2\pi), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t \text{ si } t \in \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ 2t \text{ si } t \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \end{cases}$$

avec $k = 0, 1, 2, 3$.


u(t)
7π/2
13π/4
3π
11π/4
5π/2
9π/4
2π
7π/4
3π/2
5π/4
π
3π/4
π/2
π/4
π/4
π/2
3π/4
π
5π/4
3π/2
7π/4
2π
t

8°

3°)

3.1°) On a,

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + u(t), \\ x_2'(t) = w_0^2\, x_1(t) + 2\beta w_0 \cdot (-x_2(t) + u(t)) \end{cases}$$

Comme $\beta = 0$, on obtient.

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + u(t), \\ x_2'(t) = w_0^2 \cdot x_1(t). \end{cases}$$

Si on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$,

on obtient

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B \cdot u(t),$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ w_0^2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.2°) On pose

$$E = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

E est solution de l'équation de Riccati stationnaire suivante :

$$A^t E + E.A + E.B.U^{-1} B^t E = W.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 0 & w_0^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ w_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} c w_0^2 & b w_0^2 \\ -a & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c w_0^2 & -a \\ b w_0^2 & -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 2cw_0^2 & bw_0^2-a \\ bw_0^2-a & -2c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 2cw_0^2 & bw_0^2-a \\ bw_0^2-a & -2c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 & ac \\ ac & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} a^2+2cw_0^2 & bw_0^2-a+ac \\ bw_0^2-a+ac & c^2-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} a^2+2cw_0^2=0 & (*) \\ bw_0^2-a+ac=0 & (**) \\ c^2-2c=1 & (***) \end{cases}$$

D'après (***), on a

$$c = \sqrt{2}+1 > 0 \quad \text{ou} \quad c = 1-\sqrt{2} < 0.$$

Comme $w_0^2 > 0$, alors d'après (*), on a

$$\boxed{c = 1-\sqrt{2}.}$$

De même d'après (*), on a :

$$a = \pm\sqrt{-2c}\, w_0$$

$$= \pm\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\, w_0.$$

Comme on sait que la matrice E doit être définie négative, on prend $a = -\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\, w_0$.

Par suite d'après (**), on a

$$b = \frac{a(1-c)}{w_0^2} = \frac{\sqrt{2}}{w_0^2}\, a.$$

$$= \boxed{-\frac{2\sqrt{\sqrt{2}-1}}{w_0}}$$

3.3) L'expression du contrôle optimal en fonction de X.

On a,

$$u(t) = U^{-1} . B^t . E . X(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & b \end{pmatrix} X(t)$$

$$= \begin{pmatrix} a & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} X(t)$$

$$= \begin{pmatrix} a & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= a . x_1(t) + (1-\sqrt{2}) x_2(t)$$

$$= -\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\, w_0\, x_1(t) + (1-\sqrt{2}) x_2(t)$$