Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Module: Systèmes Dynamiques et Applications
Examen Final, Semestre 1, 2022

Problème: Partie I) Soit le système

$$(1)\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - g(x) \end{cases}$$

avec

$$(H) \qquad g \in C^1\left[-k, +k\right], k > 0, \quad xg(x) > 0 \quad si \quad x \neq 0, g(0) = 0.$$

a) Montrer que (1) n'admet pas de solution périodique.

Sol: Il suffit d'appliquer le critère de Dulac.**03 pts**

b) Montrer que

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s)ds$$

est une fonction de Lyapunov **03 pts .** En déduire que $(0, 0)$ est stable.

Sol: V est définie positive, et sa dérivée est définie negative.

c) En utilisant le principe de La Salle, montrer que $(0, 0)$ est Asymptotiquement stable. **04 pts**

Sol:L'ensemble des points (x, y) qui annullent $\frac{d}{dt}V\left(x(t), y(t)\right)$ est constitué de l'axe des x.Le seul point qui est invariant sur cet ensemble est $(0, 0)$ .Le principe de La Salle implique qu'il est asymptotiquement stable.

Partie II)

a) Soit $g(x) = 6x + 3x^2$, etudier la nature de $(0, 0)$**.04pts**

Sol: $V(x, y) = \frac{y^2}{2} + 3x^2 + x^3$ est une fonction de Lyapunov pour $x > -3$.Ainsi $(0, 0)$. est stable.

b) Determiner les points d'équilibre du système **02 pts** . Ensuite donner le bassin d'attraction de $(0, 0)$. **04 pts**

sol: $(0, 0)$, $(-2, 0)$ sont des points d'équilibre.Nous avons

$$\frac{d}{dt}V\left(x(t), y(t)\right) = \nabla V.f$$

où f étant le champ de vecteurs de (1), i.e

$$f\left(x, y\right) = \begin{pmatrix} y \\ -y - g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -y - 6x - 3x^2, \end{pmatrix}$$

Le vecteur ∇V pointe dans la même direction que le vecteur normal de l'ensemble , courbe de niveau $[V = c]$. Pour determiner le bassin d'attraction , il faut determiner l'ensemble pour que le produit scalaire

$$\nabla V.f \leq 0$$

et éviter le deuxième point d'équilibre. Ceci implique que le bassin d'attraction

$$\{(x, y) : V < V\left(-2, 0\right) = 12 - 8 = 4\}$$