Université de Tlemcen, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques
Master 1 : Biomathématiques et Modélisation 30/01/2022

Examen Final

Modélisation mathématique en biologie

Exercice 1 Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) + \beta y, \quad \dot{y} = g(x) + \delta y, \quad f(0) = g(0) = 0. \tag{0.1}$$

Supposons que $[\delta f(x) - \beta g(x)]x > 0, \quad xf(x) + \delta x^2 < 0$ pour $x \neq 0$. Montrer que la fonction

$$V(x,y) = (\delta x - \beta y)^2 + 2\int_0^x [\delta f(u) - \beta g(u)]du$$

est une fonction de Lyapunov dans un voisinage de l'origine.
En déduire que l'origine pour le système

$$\dot{x} = -x^3 + 2x^4 + y, \quad \dot{y} = -x^4 - y, \quad f(0) = g(0) = 0. \tag{0.2}$$

est localement asymptotiquement stable.

Exercice 2 : Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = -x - xy^2, \quad \dot{y} = -y - x^2 y. \tag{0.3}$$

En utilisant une fonction de Lyapunov, démontrer que l'origine est globalement asymptiquement stable.

Exercice 3

Résoudre le problème suivant :

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial t} + \frac{\partial p(a,t)}{\partial a} + p(a,t) = 1, \quad (a,t) \in (0,1) \times (0,+\infty)$$

$$p(0,t) = \int_0^1 p(a,t)da, \quad t \in (0,+\infty)$$

$$p(a,0) = 1, \quad a \in (0,1).$$

Exercice 01 : 08 pts

$$\dot{x} = f(x) + \beta y \qquad \dot{y} = g(x) + \delta y \qquad f(0) = g(0) = 0$$

$(0,0)$ est un pt d'equilibre.

Considérons la fonction de Lyapunov (à verifier) suivant :

$$V(x,y) = (\delta x - \beta y)^2 + 2\int_0^x \left[\delta f(u) - \beta g(u)\right] du$$

elle est définie positive si $\left[\delta f(x) - \beta g(x)\right] x > 0 \ (*)$

$$\dot{V} = \left\{2\delta(\delta x - \beta y) + 2\left[\delta f(x) - \beta g(x)\right]\right\}\left[f(x) + \beta y\right]$$
$$- 2\beta(\delta x - \beta y)\left[g(x) + \delta y\right]$$
$$= 2\left[\delta f(x) - \beta g(x)\right]\left[\delta x + f(x)\right]$$

$\dot{V}$ est définie negative si $\left[\delta f(x) - \beta g(x)\right]\left[\delta x + f(x)\right] < 0$

Dans un voisinage de l'origine, en utilisant $(*)$, on trouve

$$\left[\delta x + f(x)\right] x < 0 \qquad x \neq 0 \ (**)$$

donc $\dot{V}$ est bien définie negative

Conclusion V est une fonction de Lyapunov.

Pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + 2x^4 + y \\ \dot{y} = -x^4 - y \end{cases}$$

$f(x) = -x^3 + 2x^4$ $\quad g(x) = -x^4$ $\quad \beta = 1$ et $\delta = -1$

le système admet 2 équilibres $(+1, -1)$ et $(0,0)$

Les conditions (*) et (**) deviennent

$$[\delta f(x) - \beta g(x)]x = x^4 - x^5 > 0$$

Pour $0 < |x| < 1$ et $(\delta x + f(x))x = -x^2 - x^3 + 2x^5 < 0$

dans un intervalle contenant l'origine

Comme $2x^5 - x^3 - x^2 = x^2(x-1)(2x^2+2x+1)$

admet comme zéro $x = 0$ et $x = 1$ (pour $x \in \mathbb{R}$)

donc $\dot{V} < 0$ si $0 < |x| < 1$

ainsi l'origine est asymptotiquement stable

et la fonction de Lyapunov s'écrit

$$V(x,y) = (x+y)^2 + 2\int_0^x [-(-u^3 + 2u^4) + u^4]\,du$$

$$= (x+y)^2 + 2\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right)$$

Exercice 02:

$\dot{x} = x - xy^2 \qquad \dot{y} = -y - x^2 y$

$V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = 2x(-x - xy^2) + 2y(-y - x^2 y)$

$= -(x^2 + y^2 + 2x^2y^2) < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

donc $(0,0)$ est GAS

Exercice 03:

Remarquons que $P(a,t) \equiv 1$ est une solution du problème

Vue l'unicité de la solution, on conclut que $P(a,t) \equiv 1$ est la seule solution du problème.