

Niveau : *Première Année Master Biomathématiques et Modélisation*

EXAMEN FINAL

Exercice 1 : Thérapies antiangiogéniques. (13 points).

On s'intéresse au contrôle de l'angiogenèse tumorale c'est-à-dire au contrôle thérapeutique de la prolifération de cellules cancéreuses développant de nouveaux vaisseaux sanguins. On note $x(t)$ le volume de la tumeur et $y(t)$ la capacité du système vasculaire développé par la tumeur, au temps t . L'évolution de ces quantités est modélisée par le système de contrôle

$$(1) \quad \begin{cases} x'(t) = -x(t) \ln \frac{x(t)}{y(t)}, \\ y'(t) = b.x(t) - x^{\frac{2}{3}}(t)y(t) - u(t).y(t), \end{cases}$$

où le contrôle $u \in L^\infty(0, T)$ (traitement antiangiogénique) vérifie la contrainte $0 \leq u(t) \leq 1$, pour presque tout $t \in (0, T)$, $T > 0$ et $0 < b < 1$.

(1) Montrer que les points d'équilibre (x_*, y_*, u_*) du système (1) dans la région $(x > 0, y > 0, 0 \leq u \leq 1)$ sont donnés par la famille à un paramètre

$$x_* = y_* = (b - u_*)^{\frac{3}{2}}.$$

(2) Montrer que le système linéarisé en (x_*, y_*, u_*) avec $x_* = y_* = (b - u_*)^{\frac{3}{2}}$ est donné par

$$\delta \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b - \frac{2}{3}x_*^{\frac{2}{3}} & -x_*^{\frac{2}{3}} - u_* \end{pmatrix} \delta X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -(b - u_*)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \delta u(t).$$

(3) Montrer que si $u_* < b$, le système linéarisé est contrôlable.

(4) En déduire que le système (1) est localement contrôlable (et donc localement stabilisable par placement de pôles) autour de tout point d'équilibre tel que $0 < u_* < b$.

(5) Énoncer et démontrer une condition suffisante sur $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ pour que le système bouclé par le feedback $\delta u = K.\delta X$ soit localement asymptotiquement stable en un point d'équilibre tel que $0 < u_* < b$.

(6) On pose $q = \frac{x}{y}$ et $u = bq - q^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} + v$ où v est un nouveau contrôle. Noter que ce changement de variable respecte la contrainte initiale sur u si q est suffisamment proche de 1 et y pas trop grand.

6.1) Montrer que le système (1) est équivalent à

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{q}(t) = -q(t) \ln q(t) + v(t)q(t), \\ \dot{y}(t) = -v(t).y(t), \end{cases}$$

6.2) Etudier les variations de la fonction $q \mapsto h(q) = \frac{1}{2}q^2 \ln q - \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}$ avec $q > 0$.

6.3) On considère la fonction V définie par $V(q, y) = \frac{1}{2}q^2 \ln q - \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}y^2$ avec $q > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.

6.3.1) Vérifier que $V(1, 0) = 0$ et $V(q, y) > 0$ pour tout $(q, y) \neq (1, 0)$.

6.3.2) Montrer que V est une fonction de Lyapunov pour le système (2) avec $v = 0$, autour du point d'équilibre $(q, y) = (1, 0)$.

Exercice 2 (07 points).

Une voiture contrôlée est modélisée de la façon suivante :

$$(3) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \cdot \cos \theta(t) \\ u_1(t) \cdot \sin \theta(t) \\ u_1(t) \tan \phi(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

où les contrôles sont u_1 et u_2 .

1. Ecrire le linéarisé du système autour d'une trajectoire $X(t) = (x; y; \theta, \phi)(t)$ correspondant à un contrôle $(u_1(t); u_2(t))$.

2. Le linéarisé autour d'une trajectoire correspondant à $(u_1; u_2) \equiv (0; 0)$ est-il contrôlable ?

3.

3.1. Mettre le système (3) sous la forme

$$X'(t) = f_1(X(t)) \cdot u_1(t) + f_2(X(t)) \cdot u_2(t).$$

3.2. Calculer les crochets de Lie $[f_1, f_2](X(t))$ et $[f_1, [f_1, f_2]](X(t))$.

3.3. Montrer que le système (3) est globalement contrôlable.

Consigne de l'examen final
du Mardi 18 janvier 2022.

Exercice 1 : 13 points.

1) Les points d'équilibre (x_*, y_*, u_*) du système (1)
dans la région $(x > 0, y > 0, 0 \leq u \leq 1)$.

(x_*, y_*, u_*) est un point d'équilibre si

$$\begin{cases} -x_* \ln \frac{x_*}{y_*} = 0, \\ b x_* - x_*^{\frac{2}{3}} y_* - u_* y_* = 0. \end{cases}$$

Comme $x_* > 0$, on obtient

$$\begin{cases} \ln \frac{x_*}{y_*} = 0, \\ b x_* - x_*^{\frac{2}{3}} y_* - u_* y_* = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} x_* = y_* , \\ bx_* - x_*^{\frac{2}{3}} y_* - u_* y_* = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} x_* = y_* , \\ u_* = b - x_*^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} x_* = y_* , \\ x_* = (b - u_*)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Alors les points d'équilibre (x_*, y_*, u_*) du système (1) dans la région $(x > 0, y > 0, 0 \leq u \leq 1)$ sont donnés par la famille à un paramètre $x_* = y_* = (b - u_*)^{\frac{3}{2}}$. 2pts

2) Le système linéarisé en (x_*, y_*, u_*) avec $x_* = y_* = (b - u_*)^{\frac{3}{2}}$.

On a,

$$\delta \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_*, y_*, u_*) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_*, y_*, u_*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_*, y_*, u_*) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_*, y_*, u_*) \end{pmatrix} \delta X(t) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(x_*, y_*, u_*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(x_*, y_*, u_*) \end{pmatrix} \delta u(t),$$

avec $f_1(x, y, u) = -x \ln \frac{x}{y}$ et $f_2(x, y, u) = bx - x^{\frac{2}{3}}y - uy$.

C'est-à-dire,

$$\delta \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b - \frac{2}{3}x_*^{\frac{2}{3}} & -x_*^{\frac{2}{3}} - u_* \end{pmatrix} \delta X(t)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -y_* \end{pmatrix} \delta u(t)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b - \frac{2}{3}x_*^{\frac{2}{3}} & -x_*^{\frac{2}{3}} - u_* \end{pmatrix} \delta X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -(b - u_*)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \delta u(t).$$

3) Montrons que si $u_* < b$, le système linéarisé est contrôlable.

On pose

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b - \frac{2}{3}x_*^{2/3} & -x_*^{2/3} - u_* \end{pmatrix}$$

et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -(b - u_*)^{3/2} \end{pmatrix}$.

2 pts

On va appliquer le critère de Kalman.

On a,

$$\text{rg}(B \quad AB) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & -(b - u_*)^{3/2} \\ -(b - u_*)^{3/2} & (x_*^{2/3} + u_*)(b - u_*)^{3/2} \end{pmatrix}$$

$$= 2 \text{ si } b < u_*.$$

1 pt

4) Comme le système linéarisé est contrôlable, alors le système (1) est localement contrôlable.

1pt

5) On a,

$$\begin{aligned}\dot{\delta X}(t) &= A \cdot \delta X(t) + B \cdot \delta u(t) \\ &= A \cdot \delta X(t) + B \cdot K \cdot \delta X(t) \\ &= (A + BK) \delta X(t).\end{aligned}$$

Alors,

$$A + BK = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b - \frac{2}{3}x_*^{\frac{2}{3}} & -x_*^{\frac{2}{3}} - u_* \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -(b - u_*)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b - \frac{2}{3}x_*^{\frac{2}{3}} - p_1(b - u_*)^{\frac{3}{2}} & -x_*^{\frac{2}{3}} - u_* - p_2(b - u_*)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\lambda I_2 - (A + BK)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -b + \frac{2}{3}x_*^{\frac{2}{3}} + k_1(b - u_*)^{\frac{3}{2}} & \lambda + x_*^{\frac{2}{3}} + u_* + k_2(b - u_*)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (1 + x_*^{\frac{2}{3}} + u_* + k_2(b - u_*)^{\frac{3}{2}}) \lambda$$

$$+ x_*^{\frac{2}{3}} + u_* + k_2(b - u_*)^{\frac{3}{2}} - b + \frac{2}{3}x_*^{\frac{2}{3}} + k_1(b - u_*)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \lambda^2 + (1 + x_*^{\frac{2}{3}} + u_* + k_2(b - u_*)^{\frac{3}{2}}) \lambda - b + u_* + \frac{5}{3}x_*^{\frac{2}{3}} + (k_1 + k_2)(b - u_*)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \lambda^2 + (1 + b + k_2(b - u_*)^{\frac{3}{2}}) \lambda + \frac{2}{3}(b - u_*) + (k_1 + k_2)(b - u_*)^{\frac{3}{2}}$$

$A + BK$ est Hurwitz si

$$1 + b + k_2(b - u_*)^{\frac{3}{2}} > 0,$$

et

$$\frac{2}{3}(b - u_*) + (k_1 + k_2)(b - u_*)^{\frac{3}{2}} > 0$$

On prend par exemple $k_1 = 1$ et $k_2 = 0$.

(2 pts)

6)

6.1) On a,

$$\begin{cases} q = \frac{x}{y}, \\ \text{et} \\ u = bq - (qy)^{\frac{2}{3}} + v. \end{cases}$$

Comme,

$$x(t) = q(t)y(t).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{q}(t)y(t) + q(t)\dot{y}(t) \\ &= \dot{q}(t)y(t) + q(t)[bx(t) - x^{\frac{2}{3}}(t)y(t) - u(t)y(t)] \\ &= \dot{q}(t)y(t) + q(t)[bq(t) - x^{\frac{2}{3}}(t) - u(t)]y(t) \\ &= \dot{q}(t)y(t) + q(t)[bq(t) - (q(t)y(t))^{\frac{2}{3}} - u(t)]y(t) \\ &= \dot{q}(t)y(t) - q(t)v(t)y(t) \end{aligned}$$

Comme

$$\dot{x}(t) = -x(t) \ln \frac{x(t)}{y(t)},$$

on obtient

$$-\frac{x(t)}{y(t)} \ln \frac{x(t)}{y(t)} = \dot{q}(t) - q(t) v(t).$$

C'est-à-dire,

$$\dot{q}(t) = -q(t) \ln q(t) + q(t) v(t).$$

De même, on a

$$\dot{y}(t) = b x(t) - x^{2/3}(t) y(t) - u(t) y(t)$$

$$= [b q(t) - x^{2/3}(t) - u(t)] y(t)$$

$$= [b \cdot q(t) - q^{2/3}(t) y^{2/3}(t) - u(t)] y(t)$$

$$= -v(t) y(t).$$

1 pt

6.2°) On a, $\lim_{q \rightarrow 0} h(q) = \frac{1}{4}$ et $\lim_{q \rightarrow +\infty} h(q) = +\infty$.

D'autre part, on a

$$h'(q) = q \ln q.$$

Alors, on a le tableau de variations

q	0	1	$+\infty$
$h'(q)$	$\ominus$	0	$\oplus$
$h(q)$	$\frac{1}{4}$	0	$+\infty$

1 pt

6.3°)

6.3.1°) On a,

$$\begin{aligned} V(1,0) &= \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus d'après la question précédente 6.1), on a

$$V(q,y) > 0 \text{ pour tout } (q,y) \neq (1,0).$$

1 pt

6.3.2°) On a,

i) V est de classe C^1 car V est continue

et $\frac{\partial V}{\partial q}(q, y) = q \ln q$ et $\frac{\partial V}{\partial y}(q, y) = y$ sont continues.

ii) $V(1, 0) = 0$ et $V(q, y) > 0$, pour tout $(q, y) \neq (1, 0)$.

iii) Pour $v=0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(q, y) &= \langle \nabla V(q, y), (-q \ln q, 0) \rangle \\ &= -q^2 \ln^2 q \leq 0. \end{aligned}$$

Alors V est une fonction de Lyapunov non stricte pour le système (2) avec $v=0$, autour du point d'équilibre $(q, y) = (1, 0)$.

2 pts

Exercice 2 : 07 points.

1) Le système linéarisé autour d'un point d'équilibre

$$(X_*, u_1^*, u_2^*) = (c_1, c_2, c_3, c_4, u_1^*, u_2^*) \text{ est}$$

donné par

$$\dot{\delta X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u_1^* \sin c_3 & 0 \\ 0 & 0 & u_1^* \cos c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1^* (1 + \tan^2 c_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta X(t)$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos c_3 & 0 \\ \sin c_3 & 0 \\ \tan c_4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{pmatrix}$$

1 pt

2) Le linéarisé autour de $(u_1; u_2) \equiv (0, 0)$ est donnée par

$$\dot{\delta X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta X(t) + \begin{pmatrix} \cos c_3 & 0 \\ \sin c_3 & 0 \\ \tan c_4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{A} \cdot \delta X(t) + \tilde{B} \cdot \begin{pmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{pmatrix}$$

Comme $\text{rg}(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B} \quad \tilde{A}^3\tilde{B}) = 2$, alors le système linéarisé n'est pas contrôlable.

1,5 pts

3)

3.1) On a,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \\ \tan \phi(t) \\ 0 \end{pmatrix} u_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2(t)$$

$$= f_1(X(t)) u_1(t) + f_2(X(t)) u_2(t)$$

1 pt

3.2)

On a,

$$\begin{aligned} [f_1, f_2](X(t)) &= Df_2(X(t)) \cdot f_1(X(t)) - Df_1(X(t)) \cdot f_2(X(t)) \\ &= -Df_1(X(t)) \cdot f_2(X(t)) \end{aligned}$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \tan^2 \phi(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1 + \tan^2 \phi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1 pt

De même,

$$[p_1, [f_1, f_2]](X(t))$$

$$= D[f_1, f_2](X(t)) \cdot f_1(X(t)) - Df_1(X(t)) \cdot [f_1, f_2](X(t))$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \tan \phi(t) (1 + \tan^2 \phi(t)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \\ \tan \phi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \tan^2 \phi(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1 + \tan^2 \phi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) (1 + \tan^2 \phi(t)) \\ \cos \theta(t) (1 + \tan^2 \phi(t)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 pt

3.3)

On a,

$$= \begin{vmatrix} f_1(X(t)) & f_2(X(t)) & [f_1, f_2](X(t)) & [f_1, [f_1, f_2]](X(t)) \\ \cos \theta(t) & 0 & 0 & -\sin \theta(t)(1 + \tan^2 \phi(t)) \\ \sin \theta(t) & 0 & 0 & \cos \theta(t)(1 + \tan^2 \phi(t)) \\ \tan \phi(t) & 0 & -(1 + \tan^2 \phi(t)) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cos^2 \theta(t) (1 + \tan^2 \phi(t))^2 + \sin^2 \theta(t) (1 + \tan^2 \phi(t))^2$$

$$= (1 + \tan^2 \phi(t))^2 \neq 0.$$

$$\text{Alors } \text{ev} \{ f_1(X(t)), f_2(X(t)), [f_1, f_2](X(t)), [f_1, [f_1, f_2]](X(t)) \} \\ = \mathbb{R}^4,$$

et par suite d'après le théorème de Chow le système
(3) est globalement contrôlable.

1,5 pts