Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

M1 Biomathematiques et Modélisation
Etude Mathématique des modèles issus du vivant
Année 2021-2022

Examen final I

Exercice 1 (6pts)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \sqrt{x}u_t + xu_x = t + x, \quad t > 0,\ x > 0, \\ u(0,x) = x, \quad x > 0, \\ u(t,0) = t, \quad t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

1- Montrer que le problème (1) est bien posé
2- Calculer la solution du problème (1).

Exercice 2 (14pts)

On considère le modèle SI suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = \mu - \beta S(t)I(t) - \mu S(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t), \end{cases} \tag{2}$$

avec $(S(0), I(0)) = (S_0, I_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Supposons aussi que tous les paramètres sont strictement positive. On pose $N(t) = S(t) + I(t)$ et on note $R_0 = \dfrac{\beta}{\mu + \alpha}$. On définit aussi le domaine suivant :

$$\Omega = \big\{(S, I) \in R^2,\ S > 0,\ I > 0,\ N \leq 1\big\}.$$

1- Montrer que $N(t) \leq \max\{N(0), 1\}$ pour tout $t > 0$. A-t-on la $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) \leq 1$? (justifier)
2- Montrer que Ω est positivement invariant.
3- Montrer que S est une fonction uniformément continue sur $[0, T]$ pour tout $T > 0$.
4- Montrer que S est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
5- Montrer qu'il existe une constante positive c telle que $S(t) \geq c$ pour tout $t > 0$.
6- En utilisant la fonction suivante :

$$V(S, I) = I,$$

montrer que le point d'équilibre $(1, 0)$ est globalement asymptotiquement stable dans Ω si $R_0 < 1$.

7- En Utilisant la fonction de Lyapunov suivante

$$V(S, I) = S(t) - S^* \ln S(t) + I(t) - I^* \ln I(t),$$

montrer que le point d'équilibre non trivial (S^*, I^*) est globalement asymptotiquement stable dans Ω si $R_0 > 1$.

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

M1 Biomathematiques et Modélisation
Etude Mathématique des modèles issus du vivant
Année 2021-2022

Correction Examen final

Exercice 1 (8pts)

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \sqrt{x}u_t + xu_x = (t+x), \quad t>0,\ x>0, \\ u(0,x) = x, \quad x>0, \\ u(t,0) = t, \quad t>0. \end{cases} \tag{1}$$

1- Montrer que le problème (1) est bien posé
2- Calculer la solution du problème (1).

Correction

En divisant les deux côtés de l'équation de (1) sur $\sqrt{x}$ le problème devient

$$\begin{cases} u_t + \sqrt{x}u_x = \dfrac{t+x}{\sqrt{x}}, \quad t>0,\ x>0, \\ u(0,x) = x, \quad x>0, \\ u(t,0) = t, \quad t>0. \end{cases} \tag{2}$$

1- Il suffit de montrer que l'intégrale suivante est finie,

$$\int_0^m \frac{ds}{\sqrt{s}} < \infty. \text{ Voir le cours.}$$

Soit le problème suivant,

$$\begin{cases} \dfrac{dt(s)}{ds} = 1, \\ \dfrac{dx(s)}{ds} = \sqrt{x(s)}, \\ x(0) = x_0, \\ t(0) = t_0. \end{cases} \tag{3}$$

Pour $t_0 = 0$ et $x_0 > 0$ on a

$$\begin{cases} t(s) = s, \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = \sqrt{x(t)}. \end{cases}$$

Un simple calcul donne lieu

$$2\sqrt{x(t)} - t = 2\sqrt{x_0}.$$

ou bien

$$(\sqrt{x(t)} - \frac{t}{2})^2 = x_0.$$

Posons $f(t,x) = \dfrac{t+x}{\sqrt{x}}$. Le long de ces courbes caractéristiques nous avons

$$\frac{d}{dt}u(t(s),x(s)) = f(t(s),x(s)),$$

après intégration

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u(t_0,x_0) + \int_0^t f(\sigma,x(\sigma))d\sigma, \\ &= u_0(x_0) + \int_0^t f(\sigma,x(\sigma))d\sigma. \end{aligned}$$

Finalement pour $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ on obtient

$$u(t,x) = u_0\big((\sqrt{x} - \frac{t}{2})^2\big) + \int_0^t f\big(\sigma, (\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\sigma - t))^2\big) \quad \text{si} \;\; t < 2\sqrt{x}.$$

A présent nous allons calculer la solution pour $t > 2\sqrt{x}$. En effet, pour $t_0 > 0$ et $x_0 = 0$ le problème (3) donne

$$\begin{cases} t(s) = s + t_0, \\ \\ x(s) = \dfrac{s^2}{4}, \end{cases}$$

d'où $t - 2\sqrt{x} = t_0$.

Le long de ces courbes caractéristiques nous avons

$$\frac{d}{ds}u(t(s),x(s)) = f(t(s),x(s)),$$

après intégration

$$\begin{aligned} u(t(s),x(s)) &= u(t_0,x_0) + \int_0^s f(t(\sigma),x(\sigma))d\sigma, \\ &= g(t_0) + \int_0^s f(t(\sigma),x(\sigma))d\sigma, \end{aligned}$$

finalement

$$u(t,x) = g(t - 2\sqrt{x}) + \int_0^{2\sqrt{x}} f(2(\sqrt{\sigma} - \sqrt{t}) + t, \sigma)d\sigma \quad \text{si} \;\; t > 2\sqrt{x}.$$

En combinant les résultats précédents on a

$$u(t,x)=\begin{cases} u_0\big((\sqrt{x}-\frac{t}{2})^2\big)+\displaystyle\int_0^t f\big(\sigma,(\sqrt{x}+\frac{1}{2}(\sigma-t))^2\big)d\sigma & \text{si } \ t<2\sqrt{x}, \\ g(t-2\sqrt{x})+\displaystyle\int_0^{2\sqrt{x}} f(2(\sqrt{\sigma}-\sqrt{t})+t,\sigma)d\sigma & \text{si } \ t>2\sqrt{x}. \end{cases}$$

En conclusion

$$u(t,x)=\begin{cases} (\sqrt{x}-\frac{t}{2})^2+\displaystyle\int_0^t \frac{(\sqrt{x}+\frac{1}{2}(\sigma-t))^2+\sigma}{(\sqrt{x}+\frac{1}{2}(\sigma-t))^2}d\sigma & \text{si } \ t<2\sqrt{x}, \\ t-2\sqrt{x}+\displaystyle\int_0^{2\sqrt{x}} \frac{2(\sqrt{\sigma}-\sqrt{t})+t+\sigma}{\sigma}d\sigma & \text{si } \ t>2\sqrt{x}. \end{cases}$$

Pour finir l'exercice, il faut vérifier, en utilisant la formule de Leibniz, que la fonction trouvée est une solution du problème (1).

Exercice 2 (12pts)

On considère le modèle SI suivant :

$$\begin{cases} S'(t)=\mu-\beta S(t)I(t)-\mu S(t), \\ I'(t)=\beta S(t)I(t)-(\mu+\alpha)I(t), \end{cases} \tag{4}$$

avec $(S(0),I(0))=(S_0,I_0)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$. Supposons aussi que tous les paramètres sont strictement positive. On pose $N(t)=S(t)+I(t)$ et on note $R_0=\dfrac{\beta}{\mu+\alpha}$. On définit aussi le domaine suivant :

$$\Omega=\big\{(S,I)\in R^2,\ S>0,\ I>0,\ N\leq 1\big\}.$$

1- Montrer que $N(t)\leq\max\{N(0),1\}$ pour tout $t>0$. A-t-on la $\lim\limits_{t\to\infty}N(t)\leq 1$? (justifier)
2- Montrer que Ω est positivement invariant.
3- Montrer que S est une fonction uniformément continue sur $[0,T]$ pour tout $T>0$.
4- Montrer que S est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
5- Montrer qu'il existe une constante positive c telle que $S(t)\geq c$ pour tout $t>0$.
6- En utilisant la fonction suivante :

$$V(S,I)=I,$$

montrer que le point d'équilibre $(1,0)$ est globalement asymptotiquement stable dans Ω si $R_0<1$.

7- En Utilisant la fonction de Lyapunov suivante

$$V(S,I)=S(t)-S^*\ln S(t)+I(t)-I^*\ln I(t),$$

montrer que le point d'équilibre non trivial (S^*,I^*) est globalement asymptotiquement stable dans Ω si $R_0>1$.

Correction

1- Après sommation des équations de (4) on a

$$N'(t) \leq \mu - \mu N(t),$$

un simple calcul donne,

$$N(t) \leq (N(0) - 1)e^{-\mu t} + 1. \tag{5}$$

Maintenant, si $N(0) \leq 1$ alors $N(t) \leq 1$.

Si $N(0) > 1$ alors de (5) on a

$$N(t) \leq (N(0) - 1) + 1 = N(0).$$

On conclusion on trouve que $N(t) \leq \max\{N(0), 1\}$. De (5) on a $\limsup_{t\to\infty} N(t) \leq 1$ mais on n'a pas systématiquement $\lim_{t\to\infty} N(t) \leq 1$ car on ne sait pas si la limite existe ou non!

2- Déjà de (5) on a si $N(0) \leq 1$ alors $N(t) \leq 1$. Maintenant s'il existe

$t_1 = \inf\{t > 0, \quad (S(t_1), I(t_1)) \in \partial\Omega\}$ alors $S(t_1) = 0$ ou $I(t_1) = 0$. Si $S(t_1) = 0$ et $I > 0$ alors $S'(t_1) = \mu > 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ petit tel que $S(t_1 - \varepsilon) < S(t_1) = 0$ contradiction avec la définition de t_1. Si maintenant $I(t_1) = 0$ et $S \geq 0$ alors par le Théorème de Lipschitz $I(t) = 0 \ \forall \ t \geq 0$ cependant $I(0) \neq 0$ donc c'est une contradiction.

3- S est une fonction continue sur $[0, T]$, fermé borné dans $\mathbb{R}$. Donc S est uniformément continue, car toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

4- On sait, d'après la question 2, que $S(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Ceci implique que $S(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et $T > 0$. Puisque S est une fonction continue sur un compact, alors elle atteint son minimum. Il vient que $S(t) \geq \inf_{t\in[0,T]} S(t) = \min_{t\in[0,T]} S(t) = S(t_0)$ pour $t_0 \in [0, T]$. Puisque $S(t_0) > 0$ alors $c = S(t_0)$. A présent, nous allons montrer que S est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Il suffit de montrer que $S'(t)$ est uniformément borné. En effet, en utilisant l'équation de S on trouve

$$|S'(t)| \leq \mu + \beta|S(t)||I(t)| + \mu|S(t)|.$$

Notre objectif est atteint car, d'après la question 1, S et I sont uniformément bornées.

5- Supposons par contradiction, qu'il existe une suite $(t_n)_n$, telle que $S(t_n) \to 0$ quand $t_n \to \infty$. Puisque S est uniformément continue, alors $S'(t_n) \to 0$ quand $t_n \to \infty$. Remplaçons t par t_n dans l'équation de S on trouve $S'(t_n) = \mu - \beta S(t_n)I(t_n) - \mu S(t_n)$. Passons à la limite on a $0 = \mu$ contradiction!

4- On considère la fonction suivante $V(S, I) = I$(qui n'est pas une fonction définie positive!) On dérive le long des trajectoires de (4) on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(S, I) &= \beta S(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t), \\
&= I(t)(\mu + \alpha)\big(\frac{S(t)}{\mu + \alpha} - 1\big), \\
&\leq I(t)(\mu + \alpha)\big(\frac{1}{\mu + \alpha} - 1\big), \\
&= I(t)(\mu + \alpha)\big(R_0 - 1\big) < 0.
\end{aligned}$$

A présent, $\frac{d}{dt}V(S,I) = 0$ implique que $I = 0$. A travers l'équation de S en (4) on a

$$S'(t) = \mu - \mu S(t),$$

et donc l'ensemble invariant vérifiant $\frac{d}{dt}V(S,I) = 0$ contient seulement le singleton $\{(1,0)\}$. D'après LaSalle $(S(t), I(t))$ converge vers $(1,0)$. Pour atteindre la stabilité globale "V n'est pas définie positive", il faut montrer en plus de la convergence, que $(1,0)$ est localement stable ; cela peut facilement se faire par linéarisation.

4- Cette fonction V est définie positive son seul minimum est le point (S^*, I^*). Après calcul on trouve

$$\frac{d}{dt}V(S,I) \quad = \quad -\frac{\mu}{S^* S(t)}(S - S^*)^2 \leq 0.$$

Comme auparavant $\frac{d}{dt}V(S,I) = 0$ implique que $S = S^*$ et par l'équation $I = I^*$. CQFD.