Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire : 2021-2022**
Faculté des Sciences **Module : Contrôle des systèmes**
Département de Mathématiques **Date : 12-12-2021**

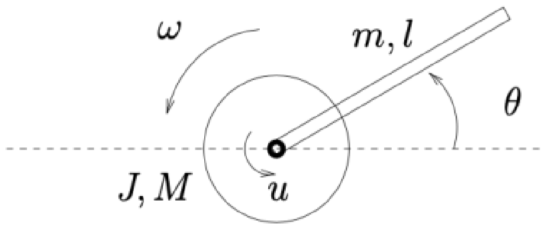
Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

CONTRÔLE CONTINU.

EXERCICE 1 (9 points) : On modélise un satellite en orbite par un système plan composé d'une roue à inertie de masse $M > 0$ et de moment d'inertie $J > 0$ et d'une barre rigide de masse $m > 0$ et de longueur $l > 0$. La barre symbolise un télescope que l'on désire aligner sur une étoile fixe. A l'aide d'un moteur, la roue à inertie peut appliquer sur l'extrémité fixe de la barre un couple $u \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ avec $T > 0$, permettant ainsi de contrôler le système. On désigne par θ l'angle que fait la barre par rapport à une direction fixe, et par ω la vitesse angulaire de la roue à inertie. Les équations régissant la dynamique du système sont

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = \dfrac{u(t)}{m.l^2}, \\ \dot{\omega}(t) = -\dfrac{u(t)}{J}, \end{cases}$$

complétées par les conditions initiales $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (\theta_0, \theta_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega(0) = \omega_0 > 0$.



1. Mettre le système commandé sous la forme

(1) $$\dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t).$$

2. Expliquer pourquoi le système (1) avec la condition initiale $X(0) = X_0$ possède une unique solution globale.

3. Montrer que le système (1) n'est pas contrôlable.

4. On observe en sortie $Y = \theta$. Montrer que le système (1) n'est pas obsevable.

5. On définit le moment cinétique associé au système (1)

$$M_1(t) = J.\omega(t) + m.l^2.\dot{\theta}(t), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

5.1) Montrer que M_1 est une constante du mouvement (c'est-à-dire une fonction constante le long de toute solution du système).

5.2) En déduire l'expression de $M_1(t)$ en fonction des données de l'énoncé.

5.3) En déduire que le système (1) n'est pas contrôlable.

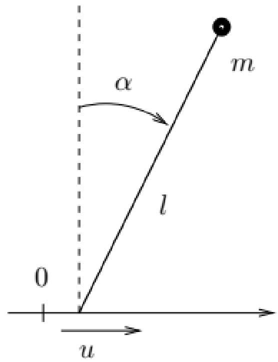
6. On considère le sous-système contrôlé associé à la variable $Z = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il est contrôlable.

7. Démontrer que l'ensemble des points atteignables $A(T,X_0)$ du système $\dot{X}(t)=A.X(t)+B.u(t)$ est un espace affine et le caractériser complètement à l'aide des questions précédentes.

EXERCICE 2 (11 points) :(Stabilisation d'un pendule inversé). On s'intéresse au problème de stabilisation d'un pendule unidimensionnel autour de son équilibre instable, par exemple un balai dans un plan posé sur le manche. On agit sur le balai en déplaçant son point de contact le long d'une droite, l'axe Oz. En supposant que notre contrôle est l'accélération u de ce point de contact, la dynamique du balai est régie par l'équation suivante :

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{g}{l}\sin\alpha(t) - \frac{u(t)}{l}\cos\alpha(t), \tag{2}$$

où α est l'angle du balai avec la verticale.



1. En posant $\omega(t)=\dot{\alpha}(t)$ et $X(t)=\begin{pmatrix}\alpha(t)\\ \omega(t)\end{pmatrix}$. Mettre l'équation du mouvement (2) sous la forme d'un système de contrôle $\dot{X}(t)=f(X(t),u(t))$.

2. Vérifier que $(X_e,u_e)=(0,0)$ est un point d'équilibre du système.

3. Ecrire le système linéarisé autour du point d'équilibre $(X_e,u_e)=(0,0)$ et montrer qu'il est contrôlable.

4.

4.1) Enoncer et démontrer une condition suffisante sur $K=\begin{pmatrix}k_1 & k_2\end{pmatrix}$ pour que le système bouclé par le feedback $\delta u=K.\delta X$ soit localement asymptotiquement stable en ce point d'équilibre.

4.2) Construire un tel feedback plaçant les pôles en -1.

5.

5.1) Le système linéarisé est-il observable si on observe $\delta Y=\delta\alpha$?

5.2) Est-il possible de stabiliser le système en $(X_e,u_e)=(0,0)$ par le retour d'état statique $\delta u=k.\delta\alpha$, avec $k\in\mathbb{R}$?

Université Abou Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A. U. : 2021_2022
Module : Contrôle des systèmes.

Corrigé du contrôle continu du dimanche 12 décembre 2021.

Exercice 1 : 09 points

1°) On pose $X(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$.

Alors

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \\ -\frac{1}{J} \end{pmatrix} u(t).$$

2°) On a,

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.\,X(t) + B.\,u(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (C\ell)$$

Le problème de Cauchy $(C\ell)$ admet une unique solution globale car l'équation $\dot{X}(t) = A.X(t) + Bu(t)$ est linéaire et vérifie les conditions de Cauchy Lipschitz

C'est-à-dire les conditions du théorème d'existence et d'unicité d'une solution globale $X \in AC([0,T]; \mathbb{R}^3)$.

3°) Montrons que le système (1) n'est pas contrôlable. Pour cela on va appliquer le critère de Kalman.

On a,

$$\mathrm{rg}\,(B \quad AB \quad A^2B)$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m\ell^2} & 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2 < 3.$$

Alors le système n'est pas contrôlable.

4°) On a,
$$\begin{aligned} y &= \theta \\ &= (1 \quad 0 \quad 0)\,X \\ &= C.X \end{aligned}$$

Appliquons le critère de Kalman d'observabilité.

On a,

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2 < 3.$$

Alors le système (1) n'est pas observable.

5°)

5.1°) Soit $t \in [0, T]$, on a

$$\dot{M}_1(t) = J.\,\dot{w}(t) + m\ell^2.\,\ddot{\theta}(t)$$

$$= J \cdot \left(\frac{-u(t)}{J}\right) + m\ell^2.\,\frac{u(t)}{m\ell^2}$$

$$= -u(t) + u(t)$$

$$= 0.$$

Alors M_1 est une constante du mouvement.

5.2°) D'après la question précédente, on a

$$M_1(t) = M_1(0)$$

$$= \boxed{J.\,w_0 + m\ell^2.\,\theta_1}$$

5.3°) En déduire que le système (1) n'est pas contrôlable.

Soit $(\theta(T), \dot{\theta}(T)) \in \mathbb{R}^2$. Puisque M_1 est une constante du mouvement, la cible $\left(\theta(T), \dot{\theta}(T), w_0 + \frac{m\ell^2}{J}(\theta_1 - \dot{\theta}(T)) + \alpha\right)$ avec $\alpha \neq 0$ n'est pas atteignable en temps T. Par conséquent le système (1) n'est pas contrôlable.

6°) On a,

$$\dot{Z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{pmatrix} u(t)$$

$$= \tilde{A}\, Z(t) + \tilde{B}\, u(t)$$

Pour étudier la contrôlabilité de ce sous système on va appliquer le critère de Kalman.

On a,

$$\operatorname{rg}\left(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B}\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m\ell^2} \\ \frac{1}{m\ell^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2.$$

Alors le sous système associé à la variable Z est contrôlable.

7°) On a,

$$A(T, X_0) = \left\{ X(T),\ u \in L^1([0,T], \mathbb{R}) \right\}$$

$$= \left\{ e^{TA} X_0 + \int_0^T e^{(T-s)A} B\, u(s)\, ds,\ u \in L^1([0,T], \mathbb{R}) \right\}.$$

Tout d'abord puisque $u \longmapsto \int_0^T e^{(T-s)A} B\, u(s)\, ds$ est linéaire, on en déduit que $A(T, X_0)$ est un espace affine.

Maintenant comme le système (1) n'est pas contrôlable, on en déduit que $\dim A(T, X_0) < 3$. mais égale à 2 car le sous-système est contrôlable.

D'autre part comme M_1 est constante, il résulte que

$$A(T, X_0) \subset E,$$

avec $E = \left\{ (\theta(T), \dot\theta(T), w(T)) \in \mathbb{R}^3 / J w(T) + m\ell^2 \dot\theta(T) = J w_0 + m\ell^2 \dot\theta_1 \right\}$

Comme E est un hyperplan affine de dimension 2, on en déduit que $A(T, X_0) = E$.

Exercice 2 : 11 points

1°) On a

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ \frac{g}{\ell}\sin\alpha(t) - \frac{u(t)}{\ell}\cos\alpha(t) \end{pmatrix}$$

$$= f(X(t), u(t)).$$

2°) Vérifions que $(X_e, u_e) = (0, 0)$ est un point d'équilibre.

On a ;

$$f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{\ell}\sin 0 - \frac{0}{\ell}\cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $(0,0)$ est un point d'équilibre.

3°)

3.1°) Le système linéarisé autour du point d'équilibre $(X_e, u_e) = (0, 0)$.

On a,

$$\delta \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l}\cos\theta + \frac{\theta}{l}\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \delta X + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\cos\theta}{l} \end{pmatrix} \delta u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \delta X + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l} \end{pmatrix} \delta u.$$

$$= A\,\delta X + B\,\delta u$$

3.2°) Montrons que le système linéarisé est contrôlable.

Pour cela on va appliquer le critère de Kalman.

On a,

$$\operatorname{rg}(B \quad AB) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2.$$

Alors le système linéarisé est contrôlable.

4°)

4.1°) On a,

$$\delta\dot{X} = A\,\delta X + B\,\delta u$$
$$= A\,\delta X + B K\,\delta X$$
$$= (A + BK)\,\delta X.$$

Alors,

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{\ell} & -\frac{k_2}{\ell} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g - k_1}{\ell} & -\frac{k_2}{\ell} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\lambda I_2 - (A + BK)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k_1 - g}{\ell} & \lambda + \frac{k_2}{\ell} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est:

$$\lambda^2 + \frac{k_2}{\ell}\lambda + \frac{k_1 - g}{\ell}.$$

Par suite si on choisit $k_2 > 0$ et $k_1 > g$, il résulte que $A + BK$ est Hurwitz et par conséquent le système bouclé par le feedback $\delta u = K\,\delta X$ est localement asymptotiquement stable en $(X_e, u_e) = (0, 0)$.

4.2°) Pour placer les pôles en -1, on doit avoir

$$\lambda^2 + \frac{k_2}{\ell}\lambda + \frac{k_1 - g}{\ell} = (\lambda + 1)^2.$$

C'est-à-dire,

$$k_2 = 2\ell \text{ et } k_1 = \ell + g.$$

5°)

5.1°) On a,

$$\begin{aligned} \delta Y &= \delta\alpha \\ &= (1 \quad 0)\, \delta X \\ &= C\, \delta X. \end{aligned}$$

Pour étudier l'observabilité on va utiliser le critère de Kalman d'observabilité.

On a,

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2.$$

Alors le système linéarisé est observable.

5.2°) On a,

$$\dot{\delta X} = A\,\delta X + B\,\delta u$$

$$= A\,\delta X + B.k.\,\delta\alpha$$

$$= A\,\delta X + B.k.\,C.\,\delta X$$

$$= (A + B.k.C)\,\delta X.$$

On a,

$$A + B.k.C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\ell} \end{pmatrix}.k.\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{k}{\ell} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g-k}{\ell} & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\lambda I_2 - (A + B.k.C) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k-g}{\ell} & \lambda \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est

$$\lambda^2 + \frac{k-g}{\ell} = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2,$$

avec $a_1 = 0$ et $a_2 = \frac{k-g}{\ell}$.

Comme $a_1 = 0$, alors $A + B.k.C$ n'est pas Hurwitz et par suite il est impossible de stabiliser le système en $(X_e, u_e) = (0, 0)$ par le retour d'état statique $\delta u = k.\delta\alpha$, avec $k \in \mathbb{R}$.