Contrôle continu I

Exercice 1 (10pts)

On veut étudier une maladie **fortement** mortelle. A cet effet on propose le modèle suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = \mu N - \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - \mu S(t), \\ I'(t) = \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - (\phi + \mu) I(t), \\ R'(t) = \phi I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (1)$$

Supposons que toutes les données sont strictement positives.

- 1- Ce modèle est-il réaliste? (Justifier). Si ce n'est pas le cas rectifier le.
- 2- A présent on remplace μN par αN dans le modèle (1). Sous quelle condition sur les paramètres du modèle (1), $N(t)$ converge vers zéro quand t tend vers l'infinie?
- 3- Donner la relation qui se trouve entre la probabilité de transmission de la maladie p , le contact c et le paramètre β pour le modèle (1).
- 4- Calculer la période (moyenne) infectieuse pour le modèle (1).
- 5- En déduire le R_0 . (Taux de reproduction de base).

Exercice 2 (10pts)

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(t, x) + \alpha u_x(t, x) = 0, & t > 0, \quad x > 0, \\ u(t, 0) = g(t), & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x > 0, \end{cases} \quad (2)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et g, u_0 sont deux fonctions suffisamment régulières.

- 1- Trouver si elles existent des conditions adéquates pour que le problème (2) admette une solution unique continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$? (Justifier). En déduire la solution de (2) dans chaque cas.

Correction du contrôle continu I

Exercice 1 (10pts)

On veut étudier une maladie **fortement** mortelle. A cet effet on propose le modèle suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = \mu N - \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - \mu S(t), \\ I'(t) = \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - (\phi + \mu) I(t), \\ R'(t) = \phi I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (1)$$

Supposons que toutes les données sont strictement positives.

1- Ce modèle est-il réaliste? (Justifier). Si ce n'est pas le cas rectifier le.

Réponse :

Non, puisqu'une maladie fortement mortelle affecte les naissances et a un impact sur la mortalité des infectés. **(2pts)**

a- Les naissances ne peuvent pas être μN et elles doivent dépendre différemment de la population totale. **(1pt)**

b- La mortalité des infectés est divisée en deux parties : la mortalité naturelle et celle qui est due à la maladie. Le modèle (1) devient **(2pts)**

$$\begin{cases} S'(t) = \alpha N(t) - \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - \mu S(t), \\ I'(t) = \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - (\phi + \mu + \mu_1) I(t), \\ R'(t) = \phi I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (2)$$

2- A présent on remplace μN par αN dans le modèle (1). Sous quelle condition sur les paramètres du modèle (1), $N(t)$ converge vers zéro quand t tend vers l'infinie?

Réponse : Si $\alpha < \mu$, En sommant les équations du système (2), on peut montrer que $N(t)$ converge vers 0 quand t tend vers l'infinie. **(1pt)**

3- Donner la relation qui se trouve entre la probabilité de transmission de la maladie p , le contact c et le paramètre β pour le modèle (1).

Réponse : La relation est donnée comme suit $\beta \frac{N}{N} = pc$, ou bien $\beta = pc$ (voir le cours.) **(1pt)**

4- Calculer la période (moyenne) infectieuse pour le modèle (1).

Réponse :

La période est $\frac{1}{\mu + \phi}$ (voir le cours). **(2pts)**

5- En déduire le R_0 . (Taux de reproduction de base).

Réponse :

Le taux de reproduction de base est $R_0 = \frac{\beta}{\mu + \phi}$. **(1pt)**

Exercice 2 (10pts)

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(t, x) + \alpha u_x(t, x) = 0, & t > 0, \quad x > 0, \\ u(t, 0) = g(t), & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et g, u_0 sont deux fonctions suffisamment régulières.

1- Trouver si elles existent des conditions adéquates pour que le problème (3) admette une solution unique continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$? (Justifier). En déduire la solution de (3) dans chaque cas.

Correction de l'Exercice 2

1- Nous allons distinguer trois cas, à savoir, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$.

i) $\alpha = 0$.

Dans ce cas $u(t, x) = \psi(x)$ pour tout ψ une fonction dépendant seulement de la variable x . **(0.5pt)**

La condition initiale nous conduit à poser $\psi(x) = u_0(x)$ **(0.5pt)**

et la condition au bord, nous amène à supposer que $u(t, 0) = g(t) = u_0(0)$. **(0.5pt)**

Finalement le problème (3) admet une solution unique continue si et seulement si $g(t) = u_0(0)$ pour tout $t > 0$, et dans ce cas la solution est

$$\mathbf{(1pt)} \quad u(t, x) = \begin{cases} u_0(x), & \text{si } t \geq 0, \quad x > 0, \\ u_0(0), & \text{si } x = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (4)$$

avec $g(t) = u_0(0)$ pour tout $t > 0$.

Finalement il est facile de vérifier que la solution donnée par (4) vérifie le problème (3). **(0.5pt)**

ii) $\alpha > 0$.

Les courbes caractéristiques $(t(s), x(s))$ sont données comme suit **(1pt)**,

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1, \\ \frac{dx}{ds} = \alpha, \end{cases} \quad (5)$$

avec $t(0) = t_0$ et $x(0) = x_0$. La solution est

$$\begin{cases} t = s + t_0, \\ x = \alpha s + x_0. \end{cases}$$

Si la courbe initiale est $(0, x_0)$ avec $x_0 > 0$ alors $x = \alpha t + x_0$. **(0.5pt)**

Sur ces courbes, la solution est constante, donc

$$u(t(s), x(s)) = u(t(0), x(0)) = u(0, x_0) = u_0(x_0).$$

Finalement $u(t, x) = u_0(x - \alpha t)$. **(1pt)**

Si la courbe initiale est $(t_0, 0)$ avec $t_0 > 0$ alors $t = \frac{x}{\alpha} + t_0$. **(0.5pt)**

Sur ces courbes, la solution est constante, donc

$$u(t(s), x(s)) = u(t(0), x(0)) = u(t_0, 0) = g(t_0) = g\left(t - \frac{x}{\alpha}\right). \text{ **(0.5pt)**}$$

On conclut alors que u est donnée comme suit,

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0(x - \alpha t), & \text{si } x > \alpha t, \\ g\left(t - \frac{x}{\alpha}\right), & \text{si } x < \alpha t. \end{cases}$$

Pour que u soit une fonction continue de (3) sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ il faut que

$$u_0(0) = g(0). \text{ **(1pt)**}$$

On en déduit que u est une solution. En effet on a

$$\text{ **(0.5pt)** } u_t(t, x) = \begin{cases} -\alpha u'_0(x - \alpha t), & \text{si } x > \alpha t, \\ g'\left(t - \frac{x}{\alpha}\right), & \text{si } x < \alpha t, \end{cases} \quad (6)$$

et

$$\text{ **(0.5pt)** } \alpha u_x(t, x) = \begin{cases} \alpha u'_0(x - \alpha t), & \text{si } x > \alpha t, \\ -g'\left(t - \frac{x}{\alpha}\right), & \text{si } x < \alpha t, \end{cases} \quad (7)$$

Finalement en sommant (6) et (7) on obtient $u_t + \alpha u_x = 0$.

iii) $\alpha < 0$.

Dans ce cas les courbes caractéristiques sont toujours positives, c-à-d $x - \alpha t = x_0 > 0$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $t - \frac{x}{\alpha} = t_0 > 0$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Finalement u est donnée par la formule suivante,

$$\text{ **(0.5pt)** } u(t, x) = \begin{cases} u_0(x - \alpha t), \\ g\left(t - \frac{x}{\alpha}\right). \end{cases}$$

Pour que celle-ci soit une fonction il faut que

$$u_0(s) = g\left(-\frac{s}{\alpha}\right), \quad \forall s \geq 0. \quad \text{ **(1pt)**}$$

Finalement comme dans le deuxième cas on peut vérifier que cette fonction est une solution de (3).