Université de Tlemcen
Département de Mathématiques
Master I biomaths: Module Systèmes Dynamiques et Applications.
Contrôle Continu: Decembre 2021, durée 1h30.

Problème: Soit le modèle

$$(1)\begin{cases} x' = -x + ay + x^2y \\ y' = b - ay - x^2y \end{cases}, \ a, b > 0$$

a) **03 pts** Montrer que (1) admet une solution unique pour toute condition initiale $x(0) = x_0 \geq 0$, $y(0) = y_0 \geq 0$

b) **03 pts** Montrer que la solution obtenue dans a) vérifie $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$, $\forall t$.

c) **03 pts** Montrer que la solution $x(t)$, $y(t)$ est définie $\forall t$.

d) **05 pts** Determiner les points d'équilibres , et etudier leur stabilité.

e) **06 pts** Sous quelles conditions sur a, b, le système (1) admet un cycle limite.

Université de Tlemcen
Département de Mathématiques
Master I biomaths: Module Systèmes Dynamiques et Applications.
Contrôle Continu: Decembre 2021, durée 1h30.

Problème: Soit le modèle

$$(1)\left\{\begin{array}{c} x' = -x + ay + x^2 y \\ y' = b - ay - x^2 y \end{array}\right. \ , \ a, b > 0$$

a) **03 pts** Montrer que (1) admet une solution unique pour toute condition initiale $x(0) = x_0 \geq 0$, $y(0) = y_0 \geq 0$

Sol: Le second membre est de classe C^1, ainsi la solution existe , et elle est unique.

b) **03 pts** Montrer que la solution obtenue dans a) vérifie $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$, $\forall t$.

Sol: le champ est rentrant sur les axes, ainsi le premier quadrant est positivement invariant.

c) **03 pts** Montrer que la solution $x(t)$, $y(t)$ est définie $\forall t$.

Sol: On a $(x + y)' = b - x \leq b$, ceci donne que $U(t) = x(t) + y(t) \leq x_0 + y_0 + bt$, ainsi la solution est globale.

d) **05 pts** Determiner les points d'équilibres , et etudier leur stabilité.

Sol: En considérant le système $(x' = 0, y' = 0)$, nous obtenons le point d'équilibre $\left(b, \frac{b}{a+b^2}\right)$.La Jacobienne est

$$J = \begin{pmatrix} -1 + 2xy & a + x^2 \\ -2xy & -\left(a + x^2\right) \end{pmatrix}$$

nous aurons en ce point d'équilibre $\det J = a + b^2 > 0$, et trace $J = f(a, b)$ à calculer. Le point d'équilibre est stable si trace $J < 0$, instable si trace $J > 0$.

e) **06 pts** Sous quelles conditions sur a, b, le système (1) admet un cycle limite.

Sol: D'aprés le cours , on a déterminé la region de Poincaré, il suffit maintenant que le point d'équilibre est instable, i.e. $f(a, b) > 0$.