Université de Tlemcen, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences

Licence Mathématiques, 2021-2022. Module:Transformations Intégrales

Examen Final.Corrigé

Exercice1: **08 pts** Soit la fonction $f(x) = e^{-|x|}$.

a) **02 pts** Calculer la transformée de Fourier de $f(x)$.

Solution: On a

$$\widehat{f}(t) = \int_R f(x)e^{-ixt}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-ixt}dx + \int_{-\infty}^0 e^x e^{-ixt}dx$$

ce qui donne

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it} = \frac{2}{1+t^2}$$

b) **03 pts** Calculer la transformée de Fourier de $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.

Solution: On a

$$\widehat{\widehat{f}} = f(-x)$$

autrement dit, pour $f(x) = e^{-|x|}$ on obtient

$$\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(\omega) = f(-\omega) = \frac{1}{2}e^{-|\omega|}$$

c)**03 pts** En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\cos xt}{1+t^2}\right)dt$.

Solution: Comme la fonction $f(t)$=$\frac{1}{1+t^2}$ est paire, un calcul simple donne que

$$\widehat{\frac{1}{1+t^2}} = \int_R f(t)e^{-ixt}dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\cos xt dt = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\cos xt}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

Exercice 2. On souhaite résoudrel'équation de chaleur par la transformée de Fourier

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2}, \quad x \in R, \quad t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

1) **02 pts**Donner les conditions sur u pourque tous les calculs soient licites.

Solution: Il faut que

$$\int_R u(t,x)dx < \infty, \ \int_R u_t(t,x)dx < \infty, \ \int_R u_{xx}(t,x)dx < \infty$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_R u(x,t)e^{-ixt}dx = \int_R \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)e^{-ixt}dx$$

2) **03 pts**Montrer que si $x \to u(t,x)$ est C^1, et $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^1$, alors $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}} = i\omega\widehat{u}$. En déduire que si $x \to u(t,x)$ est C^2, et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^1$, alors $\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = -\omega^2\widehat{u}$

Solution: On a

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(t,x) = \int_R \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) e^{-ixt} dx$$

une intégration par parties donne

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}}(t,x) = u(x,t)e^{-ixt}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_R u(x,t)e^{-ixt}dx$$

Comme

$$u(t,x) = u(t,0) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)dx$$

et $\frac{\partial u}{\partial x}$ est intégrable, il s'ensuit que

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = 0$$

ainsi

$$\lim_{|x|\to\infty} u(t,x) = 0$$

et

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}} = i\omega\widehat{u}$$

De la même manière on conclut que

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = -\omega^2\widehat{u}$$

3)**01 pts**Montrer que $t \to \widehat{u}(t,\omega)$ vérifie

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\omega^2\widehat{u}$$

Solution: il suffit d'applique la transformée de Fourier à l'équation en utilsant 1) et 2).

4)**02 pts**En déduire explicitement $\widehat{u}(t,\omega)$.

Solution:

$$\widehat{u}(t,\omega) = \widehat{u}_0(\omega)\, e^{-\frac{t\omega^2}{2}}$$

5) **02 pts**Calculer la transformée de Fourier de la Gaussienne

$$P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Solution : D'aprés le cours, on a

$$\widehat{P_t(x)} = e^{-\frac{t\omega^2}{2}}$$

6) **02 pts**En déduire que

$$u(t,x) = P_t\left(x\right) * u_0\left(x\right), \quad \forall t > 0, \forall x \in R.$$

Solution: On a

$$P_t\left(\widehat{x) * u_0}\right.\left(x\right) = \widehat{P_t\left(x\right)}\widehat{u_0\left(x\right)}$$

ainsi

$$P_t\left(\widehat{x) * u_0}\right.\left(x\right) = \widehat{u}_0\left(\omega\right) e^{-\frac{t\omega^2}{2}}$$

ce qui donne que

$$u(t,x) = P_t\left(x\right) * u_0\left(x\right)$$