Université de Tlemcen   Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L3 - Examen final Introduction aux processus aléatoires
Durée 1h30mn

30 mai 2022

Exercice 1 :

Soit $(X_n, n \in \mathbf{N}^*)$ une suite de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètres respectifs λ_n. Dans quels cas la suite (X_n) est-elle convergente en loi ?

1. $\lambda_n = n^2 e^{-n}$.
2. $\lambda_n = e^{-n}$.
3. $\lambda_n = \ln n$.
4. $\lambda_n = \frac{3n+1}{n}$.

Exercice 2 :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi.
2. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en probabilité ?
   Indication : on calculera $\mathbf{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, $n, m \in \mathbf{N}^*, n \neq m$.

Exercice 3 :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}, \widetilde{X}_k = \ln(X_k)$ est intégrable et que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{X}_k \longrightarrow \mathbf{E}(\ln(X_1)) \quad p.s. \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Posons

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} (X_k)^{\alpha/n}.$$

   Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge presque sûrement et donner sa limite.

Exercice 4 :

Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien de $\mathbf{R}^3$ d'espérance $(1,1,1)^{tr}$ et de matrice de covariance $3I_3$.

1. Déterminer la loi du vecteur aléatoire de $\mathbf{R}^2$: $V = (X + 2Y + Z, 2X - Y + Z)$.
2. En déduire la loi et les paramètres du vecteur aléatoire $W = (X + 2Y + Z, 2X - Y + Z + 2)$.

Bon courage !

Proposition de solution de l'épreuve finale du module "Introduction aux processus aléatoires" 2021-2022

Exercice 1: 1) $\lambda_n = n^2 e^{-n}$. Nous remarquons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$

Si la suite (X_n) convergeait en loi vers une v.a. X, alors les f.c. $\varphi_{X_n}(t)$ convergeraient vers $\varphi_X(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. On a

$$\varphi_{X_n}(t) = E\left[e^{itX_n}\right] \underset{\uparrow}{=} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - it} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } t=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de la table des lois usuelles.

$$\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{1}_{\{t=0\}}$$

Si on a la convergence en loi alors $\varphi_X(t) = \mathbb{1}_{\{t=0\}}$. Or la fonction $t \mapsto \mathbb{1}_{\{t=0\}}$ n'est pas continue en 0 alors ce n'est pas une f.c. de v.a. La suite (X_n) ne converge donc pas en loi.

2) $\lambda_n = e^{-n}$: Même chose que 1).

3) $\lambda_n = \ln n$. Nous remarquons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$. Soit g une fonction continue et bornée.

$$E[g(X_n)] = \int_0^{+\infty} g(x)\,\lambda_n e^{-\lambda_n x}\,dx = \left\langle \begin{array}{ll} y = \lambda_n x & \text{si } x\to 0 \Rightarrow y\to 0 \\ & \text{si } x\to+\infty \Rightarrow y\to+\infty \\ dy = \lambda_n dx & \Rightarrow dx = dy/\lambda_n \end{array} \right\rangle$$

$$= \int_0^{+\infty} g\left(\frac{y}{\lambda_n}\right) e^{-y}\,dy.$$

On utilise la majoration $\left|e^{-y} g\left(\frac{y}{\lambda_n}\right)\right| \leq \|g\|_\infty e^{-y} = h(y)$ et la fonction h est intégrable sur $[0,+\infty)$. Comme g est continue on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\frac{y}{\lambda_n}\right) = g(0)$ et par convergence dominée, nous obtenons

$$E[g(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(0) = E[g(X)] \text{ avec } X = 0 \text{ p.s.}$$

Donc (X_n) converge en loi vers $X=0$.

4) $\lambda_n = \frac{3n+1}{n}$. Nous remarquons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 3$.

Soit g une fonction continue et bornée. On a $E[g(X_n)] = \int_0^{+\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n x} g(x)\,dx$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |\lambda_n - 3| \leq \varepsilon$. càd $\lambda_n \in [3-\varepsilon, 3+\varepsilon]$

et par suite $|\lambda_n e^{-\lambda_n x} g(x)| \leq \|g\|_\infty (3+\varepsilon) e^{(-3+\varepsilon)x} = h_\varepsilon(x)$ et la fonction h_ε est intégrable et par le théorème de la convergence dominée

$$E[g(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} 3e^{-3x} g(x)\,dx = E[g(X)] \text{ où } X \hookrightarrow \mathcal{E}(3).$$

Donc (X_n) converge en loi vers $X \hookrightarrow \mathcal{E}(3)$.

<u>Exercice 2</u> : 1) Les X_n ont la même loi alors $E[g(X_n)] = E[g(X_1)]$ pour toute fonction g continue bornée.

(X_n) converge donc en loi vers X_1.

2) On a pour tout $\varepsilon > 0$ et $m \neq n$ $P(|X_m - X_n| > \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-x-y} \mathbb{1}_{\{|x-y|>\varepsilon\}} \,dx\,dy > 0$

par définition

$$f_{(X_m, X_n)}(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est une constante positive strictement, qui ne dépend ni de m ni de n.

Par l'absurde, si (X_n) converge en probabilité vers une v.a. X alors

$$P\left(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad P\left(|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or $\{|X_n - X_m| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}\}$,

alors $\underbrace{P\{|X_n - X_m| > \varepsilon\}}_{= \text{cste} > 0} \leq \underbrace{P\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\}}_{\xrightarrow{\text{Hyp. par absurde}} 0} + \underbrace{P\{|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}\}}_{\xrightarrow{\text{Hyp. par absurde}} 0}$

on obtient $0 < \text{cste} \leq 0$ ce qui est absurde. Ainsi la suite (X_n) ne converge pas en probabilité.

<u>Exercice 3</u> : 1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{X}_k = \ln X_k$ est définie p.s. Ces v.a. sont mutuellement indépendantes car les X_k le sont et la fonction $\ln$ est mesurable car continue. $f_X(x) = 1 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

$$E[|\tilde{X}_k|] = \int_0^1 |\ln x| \cdot 1 \cdot dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 |\ln x|\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \ln x\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} [x\ln x - x]_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon\to 0} [-1 - (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon)] = 1 < \infty$$

Ainsi $\tilde{X}_k$ est intégrable. Par la LFGN,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{X}_k \longrightarrow E[\tilde{X}_1] = E[\ln(X_1)] \text{ p.s. quand } n \to +\infty.$$

2) La fonction exponentielle étant continue d'après la question précédente nous déduisons :

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k^{\frac{\alpha}{n}} = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{\alpha}{n}\ln(X_k)} \longrightarrow e^{\alpha E[\ln X_1]} = e^{\alpha \int_0^1 \ln x\,dx} =$$

$= e^{-\alpha}$ p.s. quand $n \to +\infty$.

Exercice 4 :

1) $V = \begin{pmatrix} X+2Y+Z \\ 2X-Y+Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

donc $V = A\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

V est une transformation linéaire de (X,Y,Z) qui est gaussien alors V est gaussien.

$E(V) = A\,E(X,Y,Z)^t = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calcul de la matrice de covariance de V.

$Var(X+2Y+Z) = Var(X) + 4Var(Y) + Var(Z)$ car X, Y et Z sont indépendantes vu que la matrice de covariance de (X,Y,Z) est diagonale

$C_{(X,Y,Z)} = 3I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$Var(X+2Y+Z) = 3 + 4.3 + 3 = 18$

$Var(2X-Y+Z) = 4Var(X) + Var(Y) + Var(Z) =$

$= 4.3 + 3 + 3 = 18$

$Cov(X+2Y+Z, 2X-Y+Z) \underset{\uparrow}{=} 2Var(X) - 2Var(Y) + Var(Z) =$

X, Y et Z étant indépendants $Cov(X,Y) = 0$ ...

$= 2.3 - 2.3 + 3 = 3$

On en déduit la matrice de covariance de V :

$C_V = \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}.$

Ainsi $V \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}\right).$

Ou bien :

On peut utiliser la proposition du cours directement :

$V = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + B \hookrightarrow \mathcal{N}\left(A . E\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + B \,,\, A \cdot 3 I_3 \cdot A^{t_a}\right)$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c'est à dire $E(V) = A . E\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + B$ et $C_V = A \, 3 I_3 \cdot A^{t_a}$

2) $W = (X + 2Y + Z \,,\, 2X - Y + Z + 2)$ comme $W = V + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ W est aussi gaussien comme transfo-mation linéaire d'un vecteur gaussien

$\mathcal{L}(W)$: $E(W) = E(V) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$C_W = C_V$

Ainsi

$$W \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}\right)$$