

Faculté des Sciences
Dept. Maths
2021-22

Contrôle continu de géométrie différentielle
Durée 1h30

Exercice1 (4 points)

Considérons l'espace vectoriel $M_n(R)$ des matrices carrées d'ordre n et soit $f : M_n(R) \rightarrow M_n(R)$, définie par

$$f(M) = M^2.$$

Justifier que f est de classe C^1 et déterminer la différentielle de f en tout $M \in M_n(R)$.

Exercice2 (4 Points)

Pour quelle valeur de $\alpha \in R$ l'ensemble $C = \{(x, y) \in R^2 : x^2 - y^2 = \alpha\}$ est une sous-variété de R^2 .

Exercice3 (6 points)

Soient $a > 0, b > 0$. Déterminer pour quelles valeurs de a, b le sous-ensemble T^2 de R^3 défini par l'équation

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right)^2 + z^2 = a^2$$

est une sous-variété de R^3 de classe C^∞ et de dimension 2 (Surface lisse de R^3).

Exercice4 (6 points)

Soit

$$\begin{aligned} f & : R^3 \rightarrow R^2 \\ (x, y, z) & \rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x + y + z) \end{aligned}$$

et $M = f^{-1}(\{0\})$.

- 1) Montrer que M est une sous-variété de R^3 de classe C^∞ .
- 2) Donner l'équation du sous-espace tangent en tout point de M .

Corrections

Exercice1:

La fonction f étant monômiale est donc différentiable de classe C^∞ . Sa différentielle en M appliquée à H est donnée par sa dérivée directionnelle.

$$\begin{aligned} Df(M)(H) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(M + tH) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (M + tH)^2 \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} M^2 + t(MH + HM) = MH + HM. \end{aligned}$$

Remarque: on peut aussi utiliser la définition de la différentielle i.e.

$$\begin{aligned} f(M + H) - f(M) &= (M + H)^2 - M^2 \\ &= M^2 + MH + HM + H^2 - M^2 \\ &= MH + HM + H^2 \\ &= MH + HM + o(H) \end{aligned}$$

d'où

$$Df(M)(H) = MH + HM.$$

Exercice2

Considérons la fonction $f : R^2 \rightarrow R$, $f(x, y) = x^2 - y^2 - \alpha$ qui est différentiable de classe C^∞ . Alors

$$C = f^{-1}(\{0\})$$

et pour tout $(x, y) \in R^2$, $Df(x, y) : R^2 \rightarrow R$, donnée par

$$Df(x, y) = 2(x, -y).$$

On remarque que si $\alpha \neq 0$, $Df(x, y)$ est de rang 1, car sinon $Df(x, y) = (0, 0)$ et $x = y = 0$ qui n'est pas un point de C .

Exercice3

Déterminons pour quelles valeurs de $a > 0$ et $b > 0$, T^2 est une sous-variété de R^3 .

Considérons l'application $f : R^3 \rightarrow R$; $f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - b \right)^2 + z^2 - a^2$. Nous allons d'abord déterminer les valeurs de $a > 0$ et $b > 0$ pour lesquelles f est différentiable. On remarque que à cause de la fonction racine f n'est pas différentiable au points de coordonnées $(0, 0, z)$ i.e. sur l'axe (Oz) . En remplaçant dans l'équation de T^2 , on obtient

$$b^2 + z^2 = a^2$$

et par conséquent si on choisit

$$b > a > 0 \quad (1)$$

l'axe $(0z) \cap T^2 = \phi$ (vide) et la fonction racine est indéfiniment différentiable et donc f est de classe C^∞ .

Evidemment $T^2 = f^{-1}(\{0\})$ et

$$Df(x, y, z) : R^3 \rightarrow R$$

est donnée par

$$Df(x, y, z) = 2 \left(\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \left(\sqrt{x^2 + y^2} - b \right) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right).$$

Alors pour $(x, y, z) \in R^3$, $Df(x, y, z)$ ne serait pas surjective ssi

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - b \right) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = z = 0.$$

Comme on venait de voir par la relation (1) que x et y ne peuvent pas être simultanément nuls alors si $x \neq 0$, $Df(x, y, z)$ ne serait pas surjective si

$$y = z = 0 \text{ et } x = \pm b \quad (2)$$

ce qui donne $z = \pm a \neq 0$ une contradiction avec la relation (2).

En conclusion si $b > a > 0$ alors T^2 est une sous-variété de R^3 de classe C^∞ et de dimension 2 (surface lisse de R^3).

Exercice4

1) M est une sous-variété de R^3 .

Considérons la fonction $f : R^3 \rightarrow R^2$, $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x + y + z)$ qui est de classe C^∞ . Sa différentielle en tout point $(x, y, z) \in M = f^{-1}(\{0, 0\})$; $Df(x, y, z) : R^3 \rightarrow R^2$ est donnée par

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui ne serait pas de rang maximal i.e. 2 ssi $(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) \Leftrightarrow x = y = z$. Et puisque $(x, y, z) \in M$, il s'ensuit que $3x = 0$ et

$3x^2 = 1$ ce qui est faux donc le rang de $Df(x, y, z) = 2$. Ce qui montre que M est une courbe lisse de R^3 .

2) Espace tangent à M .

Pour tout $(x, y, z) \in M$, l'espace tangent à M en (x, y, z) est donné par

$$\begin{aligned} T_{(x,y,z)}M &= \text{Ker} Df(x, y, z) \\ &= \{(u, v, w) \in R^3 : Df(x, y, z)(u, v; w) = (0, 0)\} \\ &= \left\{ (u, v, w) \in R^3 : \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (u, v; w)^\top = (0, 0) \right\} \\ &= \left\{ (u, v, w) \in R^3 : \begin{cases} xu + yv + zw = 0 \\ u + v + w = 0 \end{cases} \right\}. \end{aligned}$$