Université de Tlemcen   Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L3 - Contrôle continu Introduction aux processus aléatoires
Durée 1h30mn

10 avril 2022

Exercice 1(question de cours) : On rappelle la transformée de Fourier d'une fonction h donnée :

$$\widehat{h}(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} h(x) dx.$$

Soit X est une v.a.c. de densité f et de fonction caractéristique Φ. Comment et sous quelles conditions peut on utiliser la transformée de Fourier pour calculer la densité f à partir de la fonction caractéristique Φ quand cette dernière est donnée ?

Exercice 2 : Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{x} \mathbf{1}_{\{0<y<x\}}.$$

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X.
2. Soit g une fonction mesurable et bornée, calculer $\mathbf{E}[g(Y)|X]$.
3. En déduire la moyenne
$$\mathbf{E}\left[\tan Y | X = \frac{\pi}{4}\right]$$
.

Exercice 3 : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi de densité

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \mathbf{1}_{\{x>1\}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose

$$(Z, W) = \left(\ln X, \frac{\ln Y}{\ln X}\right)$$

.

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Calculer la loi de $Z = \ln X$.
3. Les variables $\ln X$ et $\ln Y$ sont elles indépendantes ?
4. Calculer la loi de $W = \frac{\ln Y}{\ln X}$

Exercice 4 : Soient X, Y et Z des variables aléatoires indépendantes

1. On suppose que X suit une loi de Cauchy (de paramètre 1) déterminer la loi de $\frac{1}{X}$.
2. On suppose que Y et Z suivent une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $T := \frac{Y}{Z}$ suit une loi de Cauchy.

On rappelle que la densité d'une loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ est

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Proposition de solutions du C.C. "Introduction aux pr. aléat.
L3 Math 2021-2022

Exercice 1 question de cours.

Si on note $\hat{h}(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} h(x)\,dx$, on a

$\varphi_X(u) = \hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x)\,dx$

et à l'inverse $\quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iux}\,\hat{f}(u)\,\frac{du}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} e^{-iux}\varphi_X(u)\,\frac{du}{2\pi}$.

Les conditions sont celles d'existence de la transformée de Fourier (ou de la transformée inverse de Fourier selon les notations adoptées). C'est à dire f doit être intégrable (ce qui est le cas quand f est une densité de probabilité) respectivement φ_X doit être intégrable.

Remarque : on peut reprendre les mêmes calculs en partant de la définition $\hat{h}(u) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} h(x)\,dx$.

Exercice 2 : $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{x} 1\!\!1_{\{0<y<x\}}$

1) $\mathcal{L}(Y/X)$? $\quad f_Y^{X=x}(y) := \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}$

Calcul de $f_X(x)$: $f_X(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \int_0^x \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{x}\,dy$

$$= \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{x}[y]_0^x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Ainsi $$f_Y^{X=x}(y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{x}}{\lambda e^{-\lambda x}} = \dfrac{1}{x} & \text{si } 0<y<x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2) $E[g(Y)/X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f_Y^{X=x}(y)\,dy = \int_0^x g(y)\cdot\frac{1}{x}\,dy =$

$= \frac{1}{x}\int_0^x g(y)\,dy$.

Par suite $E[g(Y)/X] = \frac{1}{X}\int_0^X g(y)\,dy$

3) $E\left[\tan Y / X=\frac{\pi}{4}\right]=\frac{1}{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan y\,dy=-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(-\sin y)}{\cos y}\,dy=$

$=-\frac{4}{\pi}\left[\ln(\cos y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4}{\pi}\frac{1}{2}\ln 2=\frac{2}{\pi}\ln 2.$

Exercice 3 : $f_X(x)=f_Y(x)=\frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{\{x>1\}}$

1) * $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & \text{si } x>1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ donc $f_X(x)\geq 0$ pour tout x réel

* $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}=1$

f est donc une densité de probabilité.

2) $\mathcal{L}(Z)$? $Z=\ln X$

Pour toute fonction mesurable et bornée g, nous avons

$\begin{cases}E[g(Z)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(z)f_Z(z)\,dz\\ E[g(Z)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\ln x)f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\ln x)\frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{\{x>1\}}\,dx=\int_0^{+\infty}g(z)e^{-2z}e^{z}dz\end{cases}$

$=\int_0^{+\infty}g(z)e^{-z}dz=\int_{-\infty}^{+\infty}g(z)e^{-z}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(z)\,dz.$ (chang^t de var.).

$z=\ln x \Rightarrow x=e^z$ et $dx=e^z dz$

$x=1\Rightarrow z=0$ et $x\to+\infty\Rightarrow z\to+\infty$

Ainsi p.s. $f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z} & \text{si } z\in[0,+\infty)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

C'est la loi exponentielle de paramètre 1.

3) $\ln X$ et $\ln Y$ sont indépendantes car ce sont des transformations mesurable et déterministes des v.a.r. X et Y qui sont indépendantes.

4) $\mathcal{L}(W)$? $W=\frac{\ln Y}{\ln X}$

On remarque que $Z=\ln X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $T=\ln Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc on connait les densités de Z et T. Nous avons Z et T indépendantes et

$w=\frac{t}{z}\Rightarrow t=zw\Rightarrow dt=z\,dw$ (ici on fixe z, on veut calculer l'intégrale en $dz\,dw$ au lieu de $dz\,dt$).

si $t=0\Rightarrow w=0$ et si $t\to+\infty\Rightarrow w\to+\infty$

$\int_{-\infty}^{+\infty}h(w)f_W(w)\,dw=E[h(W)]=\iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}}h\left(\frac{t}{z}\right)f_{(Z,T)}(z,t)\,dz\,dt$

$=\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}h\left(\frac{t}{z}\right)e^{-z}e^{-t}dz\,dt=\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}h(w)e^{-z}e^{-zw}z\,dz\,dw=\int_{\mathbb{R}_+}h(w)\int_{\mathbb{R}_+}e^{-(1+w)z}z\,dz\,dw$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} h(w) \left\{ \left[-\frac{z}{1+w} e^{-(1+w)z} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+w} e^{-(1+w)z} dz \right\} dw$$

où on a posé $\begin{cases} u = z \Rightarrow du = dz \\ dv = e^{-(1+w)z} dz \Rightarrow v = -\frac{1}{1+w} e^{-(1+w)z} \end{cases}$

$$E[h(W)] = \int_{\mathbb{R}_+} h(w) \left\{ \frac{1}{1+w} \left(-\frac{1}{1+w} \right) \left[e^{-(1+w)z} \right]_0^{+\infty} \right\} dw =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} h(w) \frac{1}{(1+w)^2} dw = \int_{\mathbb{R}} h(w) \frac{1}{(1+w)^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(w) dw$$

cad p.s. nous avons $f_W(w) = \frac{1}{(1+w)^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(w) dw$

2ème méthode : directement, en utilisant les lois de X et de Y.

Soit h une fonction mesurable et bornée.

$$\begin{cases} E[h(W)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(w) f_W(w) dw \\ E[h(W)] = E\left[h\left(\frac{\ln Y}{\ln X}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right) f_{(X,Y)}(x,y) \, dx \, dy. \end{cases}$$

X et Y sont indépendantes :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^2} \mathbb{1}_{\{x>1, y>1\}} = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y^2} & \text{si } x>1 \text{ et } y>1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $E[h(W)] = \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} h\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right) \frac{1}{x^2 y^2} dx \, dy.$

On remplace y en fonction de w et x ensuite on intègre par rapport à x.

$w = \frac{\ln y}{\ln x} \Leftrightarrow \ln y = w \ln x \Leftrightarrow y = e^{w \ln x}$

et $dy = \ln x \, e^{w \ln x} dw$

si $y \to +\infty$ alors $w \to +\infty$ et si $y = 1$ alors $w = 0$.

$$E[h(W)] = \int_0^{+\infty} h(w) \left[\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \frac{1}{e^{2w \ln x}} \ln x \, e^{w \ln x} dx \right] dw$$

$$= \int_0^{+\infty} h(w) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 e^{w \ln x}} \ln x \, dx \, dw.$$

Calcul de $\mathcal{J} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 e^{w \ln x}} \ln x \, dx$ $\left\langle \begin{array}{l} t = \ln x \Rightarrow x = e^t \\ dt = \frac{1}{x} dx = \frac{1}{e^t} dx \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty \end{array} \right\rangle$

$$\mathcal{J} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2t} e^{wt}} t e^t dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^{t+wt}} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t \, e^{-(1+w)t} dt \quad \left\langle \begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-(1+w)t} dt \Rightarrow v = -(1+w)^{-1} e^{-(1+w)t} \end{array} \right\rangle$$

$$\mathcal{J} = \left[-\frac{t}{1+w} e^{-(1+w)t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{1+w} e^{-(1+w)t}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{(1+w)^2}$$

Ainsi $E[h(W)] = \int_0^{+\infty} h(w) \frac{1}{(1+w)^2}\, dw = \int_{-\infty}^{+\infty} h(w) \frac{1}{(1+w)^2} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(w)\, dw$.

Nous avons p.s. $f_W(w) = \frac{1}{(1+w)^2} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(w)$

Exercice 4:

1) $X \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$ $\quad f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

$\mathcal{L}\left(\frac{1}{X}\right)$? On pose $S = \frac{1}{X}$, nous avons pour toute fonction g mesurable et bornée

$$\begin{cases} E[g(S)] = \int_{\mathbb{R}} g(s) f_S(s)\, ds \\ E[g(S)] = E\left[g\left(\frac{1}{X}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{1}{x}\right) f_X(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(s) \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+1}\, dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{s} \text{ et } dx = -\frac{1}{s^2}\, ds \\ \text{si } x \to -\infty \text{ alors } s \to 0, \text{ si } x \to 0^- \text{ alors } s \to -\infty \\ \text{si } x \to 0^+ \text{ alors } s \to +\infty, \text{ si } x \to +\infty \text{ alors } s \to 0 \end{cases}$$

$$E[g(S)] = \left(\int_0^{-\infty} + \int_{+\infty}^{0} \right) g(s) \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{1}{s^2}+1} \left(-\frac{1}{s^2}\right) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+s^2}\, ds.$$

Alors p.s. $f_S(s) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+s^2}$, pour $s \in \mathbb{R}$, $S \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$

2) $Y, Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $T = \frac{Y}{Z}$ $\quad \mathcal{L}(T)$?

Pour toute fonction mesurable et bornée g nous avons

$$\begin{cases} E[g(T)] = \int_{\mathbb{R}} g(t) f_T(t)\, dt \\ E[g(T)] = E\left[g\left(\frac{Y}{Z}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{y}{z}\right) f_{(Y,Z)}(y,z)\, dy\, dz \end{cases}$$

et $f_{(Y,Z)}(y,z) = f_Y(y) \cdot f_Z(z)$, car Y et Z sont indépendantes

$$E[g(T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dy\, dz =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\int_{-\infty}^{0} g(t) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2 t^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} z\, dz \right] dt}_{1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g(t) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2 t^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} z\, dz\, dt}_{2}$$

① ici $z<0$ quand $y \to -\infty$ alors $t \to +\infty$ et quand $y \to +\infty$ alors $t \to -\infty$
② ici $z>0$ quand $y \to -\infty$ alors $t \to -\infty$ et quand $y \to +\infty$ alors $t \to +\infty$
Avec le changement de variable : $t = \frac{y}{z} \Leftrightarrow y = zt$ et $dy = z\,dt$

$$E\left[g(T)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\left[-\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2+1}{2} z^2} z\,dz + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2+1}{2} z^2} z\,dz\right] dt.$$

La fonction en z : $e^{-\frac{t^2+1}{2} z^2} z$ étant impaire,

$$I = -\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2+1}{2} z^2} z\,dz + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2+1}{2} z^2} z\,dz = 2\int \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2+1}{2} z^2} z\,dz$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2+1}{2} z^2} z\,dz \quad \begin{cases} u = \frac{t^2+1}{2} z^2 \Rightarrow du = 2z\frac{t^2+1}{2}\,dz = (t^2+1) z\,dz \\ z=0 \Rightarrow u=0 \,/\, z \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty \end{cases}$$

$$I = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-u} z \frac{du}{(t^2+1) z} = \frac{2}{1+t^2}\int_{0}^{+\infty} e^{-u}\,du = \frac{2}{1+t^2}.$$

Ainsi $E\left[g(T)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}\,dt,$

et par suite p.s. $f_T(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}$ $\quad T \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$.