Université de Tlemcen Département de Mathématiques

3e Année Licence – S5 Juin 2022

Équations de la physique mathématique Examen de Rattrapage 1H30

Exercice 1(6 pts):

Soit donnée sur le domaine $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < y\}$ *l'équation aux dérivées partielles d'inconnue* $u: U \longrightarrow \mathbb{R}$ *suivante :*

$$(x + y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x - y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (H)$$

1. En passant par le changement de variables $[\![\ s = x^2 - 2xy - y^2, \quad t = y\ ]\!]$ *résoudre l'équation* (H).

2. Déterminer explicitement une solution u *de* (H) *dont le graphe contient le point* $A(-1, 1,\ 0)$.

Exercice 2 (7pts):

1. Soit le système différentiel (S) *suivant:*

$$\frac{dx}{y^2} = -\frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x(z - 2y)}.$$

a. Montrer que la fonction u définie par $u(x, y, z) = y^2 - yz$,
est une intégrale première de (S).

b. Déterminer une deuxième intégrale première v pour (S) *telle que u et v soient fonctionnellement indépendantes.*

2. Résoudre l'EDP suivante:

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = x(z - 2y).$$

Exercice 3 (7 pts):

On se donne sur le domaine $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ *l'EDP suivante.*

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \qquad (E)$$

1. De quel type est l'équation (E) *?*

2. Déterminer les courbes caractéristiques de (E).

3. En posant $X = \sqrt{y} - \sqrt{x}$, $Y = \sqrt{y} + \sqrt{x}$ *réduire l'équation* (E) *à la forme standard.*

4. Résoudre l'équation obtenue et en déduire les solutions de (E).

Bonne Chance

Université de Tlemcen Département de Mathématiques

3e Année Licence – S5 Juin 2022

Équations de la physique mathématique Examen de Rattrapage 1H30

Corrigé

Exercice 1(6 pts):

Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < y\}$ *et* $u: U \longrightarrow \mathbb{R}$ *solution de l'équation suivante:*

$$(x+y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (H)$$

1. En passant par le changement de variables $[\![\ s = x^2 - 2xy - y^2, \quad t = y\ ]\!]$ *résolvons l'équation* (H). *Nous avons*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 2(x-y)\frac{\partial u}{\partial s} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = -2(x+y)\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}. \qquad \textbf{(1 pt)}$$

En remplaçant dans (H), *nous obtenons*

$$2(x^2-y^2)\frac{\partial u}{\partial s} - 2(x^2-y^2)\frac{\partial u}{\partial s} + (x-y)\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

soit

$$(x-y)\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Or dans le domaine U, $x < y$ *d'où*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

En intégrant par rapport à t, nous trouvons

$$u(s,t) = F(s),$$

la fonction F ne dépend que de s, et est une fonction de classe C^1.

En revenant aux variables (x,y) *nous obtenons*

$$u(x,y) = F(x^2 - 2xy - y^2) \qquad \textbf{(2 pts)}$$

2. Déterminons explicitement une solution u de (H) *dont le graphe contient le point* $A(-1,1,\ 0)$.

$$A \text{ est un point du graphe de } u \Leftrightarrow u(-1,1) = 0$$

$$u(-1,1) = 0 \Longrightarrow F(2) = 0. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Nous pouvons prendre, par exemple $F(z) = \sin(\pi z)$ *car* $F(2) = \sin(2\pi) = 0$, *et la (une) solution demandée est*

$$u(x,y) = \sin\big(\pi(x^2 - 2xy - y^2)\big) \quad \textbf{(1 pt)}$$

ou tout simplement, $u(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 - 2$.

Université de Tlemcen Département de Mathématiques

3e Année Licence – S5 Juin 2022

Équations de la physique mathématique Examen de Rattrapage 1H30

Exercice 2 (7pts):

1. Soit le système différentiel (S) suivant:

$$\frac{dx}{y^2} = -\frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x(z-2y)}$$

donné sur un domaine $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

a. Montrons que la fonction u définie par $u(x,y,z) = y^2 - yz$,

est une intégrale première de (S).

Posons $P(x,y,z) = y^2, Q(x,y,z) = -xy, \quad R(x,y,z) = x(z-2y)$

Nous savons d'après le cours que u est une intégrale première de (S)

si et seulement si, $\quad V.\nabla u = 0$ où $V = (P,Q,R)^t$.

Nous avons

$$V.\nabla u = P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = -xy(2y-z) + x(z-2y)(-y)$$

$$V.\nabla u = xy\big(z - 2y - (z-2y)\big) = 0. \qquad \textbf{(2 pts)}$$

Donc u est une intégrale première de (S).

Cette intégrale première peut-être obtenue en résolvant la deuxième équation du système

$$-\frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x(z-2y)}.$$

b. Déterminons une deuxième intégrale première v pour (S):

Nous utilisons la première équation du système:

$$\frac{dx}{y^2} = -\frac{dy}{xy} \Longrightarrow \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \Longrightarrow xdx = -ydy \Longrightarrow \frac{1}{2}(x^2+y^2) = C.$$

Une deuxième intégrale est $v(x,y,z) = x^2 + y^2$. **(1,5 pt)**

Vérifions que u et v sont indépendantes:

Nous avons, par exemple,

$$\frac{D(u,v)}{D(x,z)} = \begin{vmatrix} 0 & -y \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 2xy, \left|\frac{D(u,v)}{D(x,z)}\right| = 2|xy| \neq 0, \forall (x,y,z) \in \mathcal{D}. \textbf{(0,5 pt)}$$

Donc u et v sont fonctionnellement indépendantes.

2. Résolvons l'EDP suivante:

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = x(z-2y).$$

Son système caractéristique est

$$\frac{dx}{y^2} = -\frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x(z-2y)}. \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

C'est le système (S) ayant pour intégrales premières u et v, donc la solution z de l'EDP est définie implicitement par

$$F(u,v) = 0 \ \ i.e. \quad F(y^2 - yz, x^2 + y^2) = 0, \qquad \mathbf{(1\ pt)}$$

d'où l'existence d'une fonction φ d'une seule variable de classe C^1 telle que

$$y^2 - yz = \varphi(x^2 + y^2) \ \ \mathbf{(1\ pt)}$$

et la solution z de l'EDP est définie par

$$z(x,y,z) = y - \frac{\varphi(x^2+y^2)}{y}. \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

Exercice 3 (7 pts):

On se donne sur le domaine $D =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ l'EDP suivante.

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \qquad (E)$$

1. Type de l'équation (E): On calcule son discriminant,

$$\Delta(x,y) = 0 - x(-y) = xy.$$

Comme $(x,y) \in D$ alors $xy > 0$, l'équation est hyperbolique dans D. **(1 pt)**

2. Déterminons les courbes caractéristiques de (E).

Elles sont solutions de l'équation:

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0.$$

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0 \Longrightarrow \left(\sqrt{x}\frac{dy}{dx} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}\frac{dy}{dx} + \sqrt{y}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{x}\frac{dy}{dx} - \sqrt{y} = 0 \ \ ou \ \ \sqrt{x}\frac{dy}{dx} + \sqrt{y} = 0\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad ou \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Longrightarrow \left(2\sqrt{y} - 2\sqrt{x} = C \ \ ou \ \ 2\sqrt{y} + 2\sqrt{x} = K\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\sqrt{y} - \sqrt{x} = c \ \ ou \ \ \sqrt{y} + \sqrt{x} = k\right).$$

Les courbes caractéristiques sont données par

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = c \ \ et \ \ \sqrt{y} + \sqrt{x} = k. \quad \mathbf{(2\ pts)}$$

3. Écrivons l'équation (E) sous la forme standard.

Posons $X = \sqrt{y} - \sqrt{x}$, $Y = \sqrt{y} + \sqrt{x}$, *alors*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial X}\right) \quad \mathbf{(0,25\ pt)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}\right) \quad \mathbf{(0,25\ pt)}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial X}\right)\right) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial X}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial X}\right)$$

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial Y} = \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial X} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial X}\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial X}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial X}\right) + \frac{1}{4x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\right) \quad \mathbf{(0,5pt)}$$

De même on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{4y\sqrt{y}}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}\right) + \frac{1}{4y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\right) \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

En portant dans l'équation (E) on trouve

$$x\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial X}\right) + \frac{1}{4x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\right)\right)$$
$$- y\left(-\frac{1}{4y\sqrt{y}}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}\right) + \frac{1}{4y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}\right)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial X}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}\right)\right) = 1$$

Ce qui donne

$$\left(-\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{4\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial Y}-\frac{\partial u}{\partial X}\right)+\left(\frac{1}{4\sqrt{y}}-\frac{1}{4\sqrt{y}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}=1$$

Finalement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}=-1 \quad (ES) \ \mathbf{(0,5\ pt)}$$

C'est la forme standard de l'équation (E).

4. Résolvons l'équation (ES)*:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}=-1 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)=-1 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial Y}=-X+C(Y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y}=-X+C(Y) \Longrightarrow u(X,Y)=-XY+\int C(Y)dY+K(X)$$

$$u(X,Y)=K(X)+D(Y)-XY. \ \mathbf{(1\ pt)}$$

Les fonctions K *et* D *sont de classe* C^2.

La solution générale de l'EDP (E) *est*

$$u(x,y)=K\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)+D\left(\sqrt{y}+\sqrt{x}\right)+x-y. \ \mathbf{(1\ pt)}$$