

Examen: Espaces normés et analyse hilbertienne

Exercice 1 (07 points)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = (x - \pi)^2 \text{ pour } x \in [0; 2\pi[$$

:

- (1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- (2) Étudier la convergence de la série de Fourier de f .
- (3) En déduire les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercice 2 (06 points)

I. Soit $E = C([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ et $F = C^1([0, 1])$ muni de la norme

$$\|f\|_F = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}.$$

Soit $T : E \rightarrow F$ défini par

$$Tf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Démontrer que l'application T est continue et $\|T\| = 2$.

II. On considère l'espace $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$$

1/ Montrer que $(E, \|\cdot\|_{\infty})$ est complet.

2/Pour tout $n \geq 1$ et $x \in [-1, 1]$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < \frac{-1}{n} \\ nx & \text{si } \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Converge-t-elle dans cet espace? Qu'en déduit-on?

Exercice 3 (07 points)

1/ Soit H un espace de Hilbert et a un élément non nul de H . Montrer que pour tout $x \in H$, on a

$$d\left(x, \{a\}^\perp\right) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}.$$

Indication: utiliser la notion de projection orthogonale.

2/ On considère l'espace de Hilbert $L^2([0, 1]) = \left\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty\right\}$

a/ Montrer que toute $f \in L^2([0, 1])$ est intégrable sur $[0, 1]$.

On considère l'ensemble $F = \left\{f \in L^2([0, 1]) \text{ telles que } \int_0^1 f(t) dt = 0\right\}$.

b/ Montrer que F est un sous espace vectoriel fermé de $L^2([0, 1])$.

c/ Déterminer $F^\perp$.

d/ Calculer $d(f, F)$ pour $f(t) = e^t$.

Bonne chance

Corrigé de l'examen final

Exercice 1

7 pts

$$f(x) = (x - \pi)^2 \text{ pour } x \in [0, 2\pi[.$$

1/ On remarque que f est paire $\Rightarrow b_n(f) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$
On a

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

et pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos(ny + n\pi) dy, \text{ car } \cos(ny + n\pi) = (-1)^n \cos ny \end{aligned}$$

alors

$$a_n(f) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos(ny) dy = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{4}{n^2} (-1)^n \pi = \frac{4}{n^2}.$$

Ceci est obtenu après avoir fait 2 intégrations par parties. La série de Fourier de f s'écrit

$$S(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

2/ La f est de classe $C^1(\mathbb{R})$. Le théorème de Dirichlet permet donc de conclure que, pour tout

$$x \in \mathbb{R} \quad S(f)(x) = f(x).$$

3/ D'après la question précédente

$$\pi^2 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad 0 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 2

$$1/ E = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty), \quad F = (C^1([0,1]), \|f\|_F)$$

$$\|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad Tf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

On remarque que Tf est bien définie et un élément de F i.e. de classe C^1 . car primitive d'une fct continue.

$\forall x \in [0,1]$, on a

$$(0,5) \quad |Tf(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq x \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

De plus (0,5) $(Tf)' = f$ et $\|(Tf)'\|_\infty = \|f\|_\infty$. On en déduit que $\|Tf\|_F \leq 2\|f\|_\infty$; ce qui prouve que T est continue et que $\|T\| \leq 2$.

* Montrons $\|T\| = 2$. (0,5) puisque $\|(Tf)'\|_\infty = \|f\|_\infty$, on va chercher une fct $f \in E$ tq $\int_0^1 f(t) dt = \|f\|_\infty$. Prenons $f = 1$, alors $\|f\|_\infty = 1$, $Tf(x) = x$ et donc $\|Tf\|_\infty = 1$. Il vient $\|Tf\|_F = 2\|f\|_\infty$ donc $\|T\| = 2$. (0,5)

$$2/ E = C([-1,1], \mathbb{R})$$

4/19 $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

soit $f \in E$, la fct $|f|$ étant continue sur le compact $[-1,1]$, elle est bornée et atteint ses bornes. donc $\|f\|_\infty$ est bien défini. De la même façon la fct $|f|$ est intégrable sur le cpl $[-1,1]$.

$\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont bien deux normes sur E .

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy ds $(E, \|\cdot\|_\infty)$ c-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon \quad (*)$$

$\forall x \in [-1, 1]$, on remarque que $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy ds $\mathbb{R}$. En effet, nous avons

$$\forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (**)$$

Comme $\mathbb{R}$ est complet, on déduit qu'il existe une limite $f(x)$ de la suite $(f_n(x))_n$.

Montrons maintenant que f est continue et qu'elle est bien la limite de $(f_n)_n$ ds $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

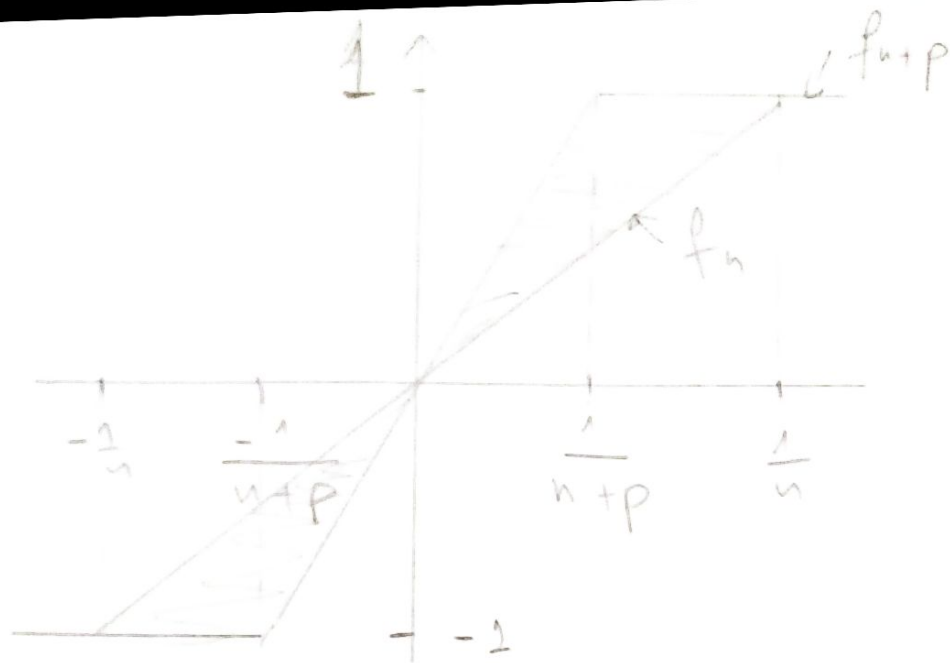
On observe que le n_0 ds $(*)$ ne dépend pas du point x car il provient de $(*)$. En conséquence, nous pouvons fixer $x \in [-1, 1]$ et $n \geq n_0$ et passer à la limite qd $p \rightarrow +\infty$ ds $(**)$, on obtient donc

$$\forall x \in [-1, 1], \forall n \geq n_0, |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad (***)$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_n$ converge unif vers f . Comme chaque f_n est cont sur $[-1, 1]$ il en est de même pour f i.e f est une fct cont. par conséquent $f \in E$.

$(***)$ entraîne que $\forall n \geq n_0, \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

or n_0 ne dépend que de ε . Ainsi $f_n \rightarrow f$ ds $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Par conséquent $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.



En utilisant le dessin ou des majorations sur le complémentaire de l'intervalle $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ alors

$$\|f_{n+p} - f_n\|_1 = \int_{-1}^1 |f_{n+p} - f_n| = \int_{-1/n}^{1/n} |f_{n+p} - f_n|$$

$$\textcircled{2} \leq \int_{-1/n}^{1/n} 2 = \frac{4}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ unif par rapport}$$

à p , ce qui prouve (f_n) est une suite de Cauchy ds $(E, \|\cdot\|_1)$.

On montre que $(f_n)_n$ ne converge pas ds $(E, \|\cdot\|_1)$.

si $f_n \rightarrow f$ alors $f = \begin{cases} -1 & \text{sur } [-1, 0[\\ 1 & \text{sur }]0, 1] \end{cases}$

(On remarque que f n'est pas f^{cont} .)

On raisonne par l'absurde supp qu'il $f \in E$ ou f est la limite de la suite (f_n) au sens de la norme $\|\cdot\|_1$.

Fixons $\alpha \in]0, 1]$ et observons que pour $n > \frac{1}{\alpha}$, les f et f_n sont identiquement égales à 1 sur $[\alpha, 1]$ ce qui donne

$$\int_{\alpha}^1 |f - 1| = \int_{\alpha}^1 |f - f_n| \leq \int_{-1}^1 |f - f_n| = \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

i.e $\int_{\alpha}^1 |f - 1| = 0 \Rightarrow f = 1 \text{ sur } [\alpha, 1]$

Pour $\alpha \in]0, 1]$, on montre que $f = 1$ sur $]0, 1]$.
Le même raisonnement montre que $f = -1$ sur $[-1, 0[$.
On obtient une contradiction avec le fait que
 f doit être continue sur $[-1, 1]$.

Pour conséquent $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas un espace
complet.

Exercice 3

1/ On sait que $\{a\}^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H .

Par définition, on a

$d(x, \{a\}^\perp) = \|x - P(x)\|$ où $P(x)$ est la projection orthogonale de x sur $\{a\}^\perp$.

la décomposition orthogonale de H est:

$$H = \mathbb{K}a \oplus \{a\}^\perp, \text{ on a } x = ta + P(x) \text{ avec } t \in \mathbb{K}.$$

Comme $P(x) \perp a$, on a $(x, a) = (ta, a) = t \|a\|^2$

Il en résulte, puisque $\|x - P(x)\| = \|ta\|$

$$\text{que } d(x, \{a\}^\perp) = \frac{|(x, a)|}{\|a\|}.$$

2/ Pour $f \in L^2([0, 1])$.

a/ f est intégrable sur $[0, 1]$, ceci est dû à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ou Hölder).

$$\int_0^1 |f(t)| dt \leq \left(\int_0^1 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \|f\|_2 < +\infty.$$

$$b/ F = \left\{ f \in L^2([0, 1]) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}.$$

F est un espace vectoriel fermé.

Considérons la forme linéaire $\phi: H \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto \phi(f) = \int_0^1 f(t) dt$

nous avons $F = \text{Ker } \phi = \phi^{-1}(\{0\})$.

ϕ est continue. En effet

$$|\phi(f)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|1\|_2 \|f\|_2$$

ϕ étant l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc F est fermé.

c) $\forall f \in L^2([0,1])$, on a $\int_0^1 f(t) dt = \langle f, \mathbb{1} \rangle$ ⁰ donc ~~18~~

$F = \{\mathbb{1}\}^\perp$, donc $F^\perp = \{\mathbb{1}\}^{\perp\perp}$ est le $\mathcal{H}$ esp. vect.
fermé constitué par des fonctions constantes ^{égale} à $\mathbb{1}$
pour $a \in \mathbb{K}$.

d) Puisque $F = \{\mathbb{1}\}^\perp$, on a d'après la 1^{ère} question

$$d(f, F) = \frac{\langle f, \mathbb{1} \rangle}{\|\mathbb{1}\|_2} = \int_0^1 f(t) dt, \text{ pour } f(t) = e^t$$

alors $d(f, F) = e - 1$. 1