Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3^{e} Année Licence – S5 — Janvier 2022

Équations de la physique mathématique — Examen Final — 1H30

Exercice 1(7 pts): *Soit λ un paramètre réel. On considère l'EDP d'ordre 2, d'inconnue $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, suivante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (E_\lambda)$$

1. Discuter selon les valeurs du paramètre λ le type de l'équation (E_λ).

2. Pour $\lambda = 1$, déterminer les courbes caractéristiques de (E_1).

3. Réduire à la forme standard l'équation (E_1) et résoudre l'équation obtenue.

4. En déduire les solutions de l'équation (E_1).

Exercice 2(8 pts): *On considère l'équation aux dérivées partielles suivante d'inconnue $u: \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0 \qquad (D)$$

1. Montrer qu'en posant $v = e^u$ i.e. $v(x,t) = \exp\big(u(x,t)\big)$, l'équation (D) se ramène à la suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (H)$$

2. De quel type est l'équation (H)?

3. Déterminer, par la méthode de séparation des variables, les solutions bornées de l'équation (H).

4. En déduire une classe de solutions de (D).

Exercice 3(5 pts):

En coordonnées polaires (r, θ) l'équation de Laplace est donnée par

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

et sa solution, pour une région circulaire, est définie par

$$u(r,\theta) = A_0 + \alpha_0 \ln r + \sum_{n\geq 1} \left[(A_n r^n + \alpha_n r^{-n})\cos(n\theta) + (B_n r^n + \beta_n r^{-n})\sin(n\theta)\right].$$

Déterminer l'expression de u pour le disque unité du plan telle que

$$u(1,\theta) = 1 - \cos(2\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Bon Courage

Corrigé détaillé

Exercice 1(7 pts): *Soit* $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *la solution de l'EDP suivante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (E_\lambda)$$

1. Type de l'équation (E_λ)*:* $\mathbf{(4 \times 0,25\ pt)}$

Discriminant de l'équation : $\Delta = b^2 - ac = y^2 - \lambda y^2 = (1-\lambda)y^2$.

Puisque $y^2 > 0$*, le signe de* Δ *dépend de celui de* $1-\lambda$.

- *Si* $\lambda < 1$ *alors* $\Delta > 0$ *et l'équation est hyperbolique.*
- *Si* $\lambda = 1$ *alors* $\Delta = 0$ *et l'équation est parabolique.*
- *Si* $\lambda > 1$ *alors* $\Delta < 0$ *et l'équation est elliptique.*

2. Courbes caractéristiques de (E_1).

Les courbes caractéristiques de (E_1) *sont les solutions de l'équation différentielle:*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{dy}{dx} + y^2 = 0. \quad \mathbf{(0,5pt)}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Longrightarrow \left(\frac{dy}{dx} + y\right)^2 = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -dx \Longrightarrow \ln|y| = -x + A \Longrightarrow y = Ce^{-x} \quad \mathbf{(0,5pt)}$$

où A *et* C *sont des constantes réelles.*

L'équation (E_1) *admet une seule famille de courbes caractéristiques*

$$ye^x = C. \quad \mathbf{(0,5pt)}$$

3. Réduction de l'équation (E_1) *à la forme standard*

Posons $X = ye^x$ *et* $Y = y$, $\mathbf{(0,5pt)}$

remarquons que le jacobien est non identiquement nul :

$$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} ye^x & ye^x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ye^x \neq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = ye^x\frac{\partial u}{\partial X} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = e^x\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^x\frac{\partial u}{\partial X}\right) = ye^x\frac{\partial u}{\partial X} + ye^x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ye^x\frac{\partial u}{\partial X} + ye^x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial X}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) = ye^x\frac{\partial u}{\partial X} + (ye^x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ye^x\frac{\partial u}{\partial X} + y^2e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}. \quad \mathbf{(0,5pt)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right) = e^x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial X}\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2e^x \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial X} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (\mathbf{0,5pt})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right) = e^x \frac{\partial u}{\partial X} + e^x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^x \frac{\partial u}{\partial X} + y e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + y e^x \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial X}. \quad (\mathbf{0,5pt})$$

Remplaçons dans l'équation (E_1) on trouve

$$y e^x \frac{\partial u}{\partial X} + y^2 e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - 2y\left(e^x \frac{\partial u}{\partial X} + y e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + y e^x \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial X}\right) + y^2\left(e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2e^x \frac{\partial^2 u}{\partial Y \partial X} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) + y\left(e^x \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right) = 0$$

En ordonnant on obtient

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + y \frac{\partial u}{\partial Y} = 0$$

Or $Y = y$ d'où

$$Y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + Y \frac{\partial u}{\partial Y} = 0. \quad (\mathbf{0,5pt})$$

Résolvons cette équation.

$$Y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + Y \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \Longrightarrow Y \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial Y}\left(Y \frac{\partial u}{\partial Y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial Y}\left(Y \frac{\partial u}{\partial Y}\right) = 0 \Longrightarrow Y \frac{\partial u}{\partial Y} = F(X) \quad (\mathbf{0,5pt})$$

Où F est fonction d'une seule variable réelle.
La dernière équation peut-être regardée comme une EDO

$$Y \frac{du}{dY} = F(X) \Longrightarrow du = F(X)\frac{dY}{Y} \Longrightarrow u = F(X)\ln|Y| + G(X)$$

$$u = F(X)\ln|Y| + G(X). \, (\mathbf{1\ pt})$$

4. *En revenant aux variables x et y nous trouvons*

$$u(x,y) = F(ye^x)\ln|y| + G(ye^x), \quad (\mathbf{0,5pt})$$

avec F et G deux fonctions définie sur $\mathbb{R}^*$, qui sont deux fois dérivables.

Exercice 2(8 pts): *On considère l'équation aux dérivées partielles suivante d'inconnue* $u: \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0 \qquad (D)$$

1. Montrons que pour $v(x,t) = \exp(u(x,t))$*, l'équation* (D) *s'écrit :*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (H)$$

On a $\quad v(x,t) = \exp(u(x,t)) \Longrightarrow u(x,t) = \ln(v(x,t))$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \mathbf{(2 \times 0,5\ pt)}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \qquad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

En substituant dans (D) *nous obtenons*

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0$$

Soit

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

Ce qui donne, en multipliant par v, l'équation (H): $\quad \partial v/\partial t = \partial^2 v/\partial x^2$.

2. L'équation (H) *est parabolique, c'est l'équation de la chaleur.* $\mathbf{(0,5\ pt)}$

Résolvons l'équation (H)*. On utilise la méthode de séparation des variables.*

Posons $v(x,t) = X(x)T(t)$.

En portant dans (H) *nous trouvons,* $XT' = X''T$.

Par suite

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Comme les variables t et x sont indépendantes nous déduisons qu'il existe une constante réelle λ telle que

$$\frac{T'}{T} = \lambda = \frac{X''}{X}.$$

D'où : $T' - \lambda T = 0$ *et* $X'' - \lambda X = 0$. $(\mathbf{2 \times 0,5}\ \boldsymbol{pt})$

Résolvons l'équation en T :

$$\frac{T'}{T} = \lambda \Longrightarrow \frac{dT}{T} = \lambda dt \Longrightarrow \ln|T| = \lambda t + K \Longrightarrow T(t) = Ce^{\lambda t}, \quad (\mathbf{1}\boldsymbol{pt})$$

v bornée $\Longrightarrow$ *T bornée sur* $[0, +\infty[\Longrightarrow \lambda \leq 0$. *(C et K sont des constantes réelles)*

Résolution de l'équation en X pour $\lambda \leq 0$: $X'' - \lambda X = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 = \lambda$.

Si $\lambda < 0$, *disons* $\lambda = -\alpha^2$ *alors* $X(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x)$. $(\mathbf{01}\ \boldsymbol{pt})$

Si $\lambda = 0$ *alors* $X(x) = C_3 x + C_4$ $(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$

(les C_i *sont des constantes réelles.)*

Remarquons que X est bornée sur $\mathbb{R}$ *pour* $\lambda < 0$.

La solution cherchée est,

$$v(x,t) = X(x)T(t) = C(C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x))e^{\lambda t}$$

i.e. $v(x,t) = (A\cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x))e^{-\alpha^2 t} \quad (\alpha > 0)$ $(\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$

La fonction v étant positive, on prend alors $v(x,t) = |A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)|e^{-\alpha^2 t}$

4. Déduction d'une famille de solutions de l'équation (D):

$$v = \exp u \Longrightarrow u = \ln v.$$

D'où

$$u(x,t) = -\alpha^2 t + \ln|A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)|, \quad (\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$$

avec $\alpha > 0$, $A, B > 0$ *et* $A \neq B$.

Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3^e Année Licence – S5 — Janvier 2022

Équations de la physique mathématique — Examen Final — 1H30

Exercice 3(5 pts):

En coordonnées polaires $(r,\ \theta)$ *l'équation de Laplace est donnée par*

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0,$$

et sa solution, pour une région circulaire, est définie par

$$u(r,\theta)=A_0+\alpha_0\ln r+\sum_{n\geq 1}\left[(A_n r^n+\alpha_n r^{-n})\cos(n\theta)+(B_n r^n+\beta_n r^{-n})\sin(n\theta)\right].$$

Remarque: Il n'est pas demandé de démontrer cette formule !

Déterminons l'expression de u pour le disque unité du plan telle que

$$u(1,\theta)=1-\cos(2\theta)\,,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

Remarquons d'abord que la fonction u doit –être définie et continue à l'intérieur du disque unité, elle est donc continue à l'origine. $(\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$

Donc les coefficients des termes $\ln r$ *et* r^{-n} $(n\geq 1)$ *sont nuls,* $(\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$ *car*

$$\lim_{r\to 0^+}\ln r=-\infty,\quad \lim_{r\to 0^+} r^{-n}=+\infty.$$

Et l'expression de $u(r,\theta)$ *devient*

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n\geq 1}\left[A_n r^n\cos(n\theta)+B_n r^n\sin(n\theta)\right]\quad (\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$$

Calculons les coefficients A_0, A_n *et* B_n.

On a $u(1,\theta)=1-\cos(2\theta)$, *en portant dans la nouvelle expression de* $u(r,\theta)$ *nous obtenons* $(pour\ r=1)$

$$1-\cos(2\theta)=A_0+\sum_{n\geq 1}\left[A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta)\right]$$

Par identification nous avons:

$$A_0=1,\qquad A_2=-1,\ \ A_n=0\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}^*\backslash\{2\},\ \ B_n=0\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}.\ (\mathbf{4}\times\mathbf{0,25}\ \boldsymbol{pt})$$

Et la solution du problème est

$$u(r,\theta)=1-r^2\cos(2\theta).\ (\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$$