Université Aboubekr Belkaïd Tlemcen *A.U. 2021/2022*

Faculté des Sciences / Département de Mathématiques

Final : Equations Différentielles [Licence L3 S5]

17 janvier 2022 1h30

Exercice 1: 5 pts

Soit le système différentiel linéaire non homogène

$$X' = A(t)X + B(t),$$

défini dans un espace de Banach E , où $A(t) \in \mathbf{E}nd(E)$ et B continue pour $t \in I \subset \mathbb{R}$. Soit $X(t) = R(t,t_0).C$, $C \in E$, la solution générale de l'équation homogène associée, où $R(t,t_0)$ est la résolvante. Déterminer la solution particulière $t \mapsto \psi(t)$ du système différentiel linéaire non homogène, telle que $\psi(t_0) = 0$. En déduire l'expression de la solution générale du système non homogène.

Exercice 2: 7.5 pts

Considérons les systèmes différentiels linéaires non homogènes

$$(S_{a,b}) \begin{cases} \dot{x} = ax + y, \\ \dot{y} = by + z \\ \dot{z} = (a+1)(-y+2z+1) \end{cases} \qquad a,b \in \mathbb{R}.$$

1. Pour $(S_{0,0})$, caluler d'abord la composante $x(t)$ et en déduire la solution générale $(x(t),y(t),z(t))$.

2. Trouver la solution générale de $(S_{-1,-1})$.

Exercice 3 : 7.5 pts

Soit le système différentiel linéaire homogène

$$(\Sigma_a) \begin{cases} \dot{x} = ax + y, \\ \dot{y} = -x + y, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. a) Montrer que si la somme des valeurs propres de la matrice associée est strictement négative, alors l'origine $(0,0)$ n'est pas stable.

b) Existe-t-il une solution non nulle $(x(t),y(t))$ qui converge vers l'origine quand t tend vers $+\infty$?

2. Résoudre le système(Σ_{-2}) en précisant un système fondamental de solutions.

3. Confirmez votre réponse à la question 1.a).

Notre pédagogie ne donne à ceux qui apprennent les mathématiques que bien peu de chances d'entrevoir le sens profond, la raison d'être, de ce sur quoi portent leurs efforts.

- Seymour Papert, in "Jaillissement de l'esprit"

Université de Tlemcen / Faculté des Sciences — Aux. 2021/2022

Département de Mathématiques

Corrigé du Final d'EDO, L3 (SS)

Exercice 1 : (Voir cours)

5

Exercice 2 :

1) Le système $(S_{0,0})$ $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y + 2z + 1 \end{cases}$

est associé à l'équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 3 :

$$\dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} = 1 \qquad (E)$$

0,5

[Poser $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}$]

- Résolution de l'équa. diff. homogène

$$\dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} = 0 \qquad (E_h)$$

Equation caractéristique :

$$r^3 - 2r^2 + r = 0 \qquad (C)$$

$$\Leftrightarrow \quad r(r^2 - 2r + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r(r-1)^2 = 0$$

0,5

d'où deux solution $r = 0$ de multiplicité 0 donnant la solution élémentaire $t^0 \cdot e^{0 \cdot t} = 1$

et $r=1$, de multiplicité 2, donnant deux solutions élémentaires $t^0 e^t$ et te^t.

Ainsi, la solution générale de (E_h) est engendrée par les 3 solutions linéairement indépendantes 1, e^t et te^t, i.e

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 t e^t, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$ 1

- Solution particulière de (E) :

On voit de manière évidente que $x(t) = t$ est une solution de (E). 1

- Cl : la solution générale de (E) est donnée par

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 t e^t + t, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$ 0,5

- On en déduit que, pour $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = \dot{x}(t) = C_2 e^t + C_3 e^t + C_3 t e^t + 1$$ 0,5

$$= (C_2 + C_3) e^t + C_3 t e^t + 1$$

et

$$z(t) = \ddot{x}(t) = \dot{y}(t) = (C_2 + C_3) e^t + C_3 e^t + C_3 t e^t$$ 0,5

$$= (C_2 + 2C_3) e^t + C_3 t e^t$$

Nous avons ainsi trouvé la solution générale de $(S_{0,0})$.

2) $(S_{-1,1,1})$ $\begin{cases} \dot{x} = -x + y & (1) \\ \dot{y} = -y + z & (2) \\ \dot{z} = 0 & (3) \end{cases}$

$(3) \Leftrightarrow \underline{z(t) = C}$, $\underline{C \in \mathbb{R}}$. 1

$(2) \Leftrightarrow \dot{y} = -y + C \Leftrightarrow \dot{y} + y = C$

$\Leftrightarrow e^t.\dot{y} + e^t.y = Ce^t \Leftrightarrow (e^t y)' = Ce^t$

$\Rightarrow e^t y = Ce^t + K$, $K \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \underline{y(t) = C + Ke^{-t}}$, $\underline{C, K \in \mathbb{R}}$. 1

$(1) \Leftrightarrow \dot{x} = -x + C + Ke^{-t}$

$\Leftrightarrow \dot{x} + x = C + Ke^{-t}$

$\Leftrightarrow e^t.\dot{x} + e^t.x = Ce^t + K$

$\Leftrightarrow (e^t.x)' = Ce^t + K$

$\Rightarrow e^t x = Ce^t + Kt + L$, $L \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \underline{x(t) = C + Kte^{-t} + Le^{-t}}$, $\underline{C, K, L \in \mathbb{R}}$ 1

Le système est résolu.

Exercice 3.

1.a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

La somme des valeurs propres $\lambda_1 + \lambda_2$ est égale à la trace de A

i.e $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}A = a+1$.

Sachant que $\mathrm{Det}A = a+1$, si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ alors $\mathrm{Det}A < 0$ (1)

i.e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. $(0,0)$ est donc un point-selle

et n'est pas stable.

b) Oui. Pour un point-selle, il existe des solutions non nulles qui convergent vers $(0,0)$ (on appelle leurs orbites des séparatrices stables) (0,5)

2. $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\dots) = \lambda^2 + \lambda - 1$

(polynome caractéristique)

Les racines sont $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ (1)

(on retrouve point de pt-selle).

Les deux valeurs propres réelles sont de multiplicité 1.

Espaces propres associés,

$E_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, (A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$

or $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2-\lambda)x + y = 0 \\ -x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = (1-\lambda)y \\ ((-2-\lambda)(1-\lambda)+1)y = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + \lambda - 1)y = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \end{cases}$

Ainsi si $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x = (1-\lambda_1)y \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}y$.

i.e. $E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. 1

et si $\lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x = (1-\lambda_2)y \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}y$

i.e $E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2}\beta \\ \beta \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$. 1

La solution générale s'écrit donc

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

$$= \alpha e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t} \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} I \cdot \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$ 1,5

$$= \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t} \\ e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t} \end{pmatrix}}_{\phi_1(t)} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} \\ e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} \end{pmatrix}}_{\phi_2(t)} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$ est un système fondamental de solutions de (Σ_2). 0,5

N.B. On pouvait aussi faire d'autres choix des vecteurs propres.

3. On voit bien que pour $\beta = 0$, les solutions $\alpha\, \phi_1(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (0,0)^T$ $\forall \alpha$,

alors que $(0,0)$ est instable !

(voir question 1.b)

1

5

6