

Contrôle continu

Durée: 1 h 30 mn

Exercice 1 (4 points):

1) Soit f une fonction différentiable sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$. En utilisant la définition de la convexité et de la dérivée directionnelle montrer que si f est convexe alors:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \quad \forall x, y \in C.$$

2) Dédurre que ∇f est monotone sur C , c'est à dire

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C.$$

Exercice 2 (4 points):

Déterminer et établir la nature des points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4.$$

Exercice 3 (12 points):

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f_\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f_\beta(x, y) = x^2 + y^2 + \beta xy + x + 2y.$$

- 1) Pour quelles valeurs de β la fonction f_β est-elle convexe?
- 2) Calculer les points critiques de f_β en fonction de β puis résoudre le problème $\min_{\mathbb{R}^2} f_\beta(x, y)$ lorsque $\beta \neq \pm 2$.

Solution du contrôle continu

Exercice 1 (4 points):

1) Soit f une fonction différentiable sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$. En utilisant la définition de la convexité et de la dérivée directionnelle montrer que si f est convexe alors:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \quad \forall x, y \in C.$$

2) Dédurre que ∇f est monotone sur C , c'est à dire

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C.$$

Solution:

1) De la définition de la convexité on a:

$$f(x + t(y - x)) = f(ty + (1 - t)x) \leq tf(y) + (1 - t)f(x), \quad \forall x, y \in C, \quad \forall t \in (0, 1),$$

ce qui implique:

$$f(x + t(y - x)) - f(x) \leq t(f(y) - f(x)). \quad (1)$$

Si on divise (1) par t et on fait tendre t vers 0 on obtient

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x),$$

ce qui donne $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$, $\forall x, y \in C$ (2 points).

2) De 1) on a:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \quad (2)$$

et

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle. \quad (3)$$

En faisant la somme de (2) et (3), on obtient:

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C \text{ (2 points)}.$$

Exercice 2 (4 points):

Déterminer et établir la nature des points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4.$$

Solution:

Le gradient de f est:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4 \\ 2y - 2 \\ 2z - 2 \end{pmatrix}$$

L'équation d'Euler $\nabla f(x, y, z) = 0$ admet une unique solution $(1, 1, 1)$ qui est l'unique point critique de f . (1 point)

Pour déterminer la nature de ce point critique, il faut calculer la matrice hessienne de f

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Au point $(1, 1, 1)$,

$$\nabla^2 f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres $\lambda_1 = 12$ et $\lambda_2 = 2$ (d'ordre de multiplicité 2) sont positives, donc $\nabla^2 f(1, 1, 1)$ est définie positive. On peut en déduire que $(1, 1, 1)$ est un minimum local pour f . (2 points)

De plus, $\nabla^2 f(x, y, z)$ est semi-définie positive. On en déduit que f est convexe, donc tout minimum local est global. Ainsi, $(1, 1, 1)$ est un minimum global. (1 point)

Exercice 3 (12 points):

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f_\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f_\beta(x, y) = x^2 + y^2 + \beta xy + x + 2y.$$

- 1) Pour quelles valeurs de β la fonction f_β est-elle convexe?
- 2) Calculer les points critiques de f_β en fonction de β puis résoudre le problème $\min_{\mathbb{R}^2} f_\beta(x, y)$ lorsque $\beta \neq \pm 2$.

Solution:

- 1) Le gradient et le hessien de f_β sont (1 point)+(1 point)

$$\nabla f_\beta(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + \beta y + 1 \\ \beta x + 2y + 2 \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f_\beta(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\nabla^2 f_\beta(x, y)$ sont solution de

$$\begin{aligned} (2 - \lambda)^2 - \beta^2 &= 0, \\ \Leftrightarrow (2 - \beta - \lambda)(2 + \beta - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda_1 = 2 - \beta$ et $\lambda_2 = 2 + \beta$. Elles sont positives lorsque $\beta \in [-2, 2]$. On déduit que f_β est convexe lorsque $\beta \in [-2, 2]$ (3 points).

2) Les points critiques de f_β sont solutions de l'équation d'Euler

$$\nabla f_\beta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \beta y = -1 \\ \beta x + 2y = -2 \end{cases}$$

On remarque que si $\beta = \pm 2$ les équations ne sont pas compatibles, il s'ensuit alors que le problème d'optimisation n'a pas de solution (1 point).

Lorsque $\beta \neq \pm 2$, l'équation d'Euler $\nabla f_\beta(x, y) = 0$ admet une unique solution (2 points)

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{2\beta - 2}{4 - \beta^2}, \frac{\beta - 4}{4 - \beta^2} \right).$$

Ce point critique est un minimum global lorsque $\beta \in (-2, 2)$ (2 points). Cependant, lorsque $|\beta| > 2$, (x^*, y^*) est un point selle (car λ_1 et λ_2 sont de signe différent) (2 points).