Université de Tlemcen | Département de Mathématiques
3e Année Licence – S5 | Novembre 2021
Équations de la physique mathématique | Examen Partiel | 1H30

***Exercice 1(6 pts)*:**
En passant par le changement de variables $[\![\ s = x, \quad t = xy\ ]\!]$, *résoudre l'équation aux dérivées partielles d'inconnue* $u: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *suivante:*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = xy^2.$$

Déterminer une solution u *dont le graphe contient le point* $A(1, 1, -1)$.

Exercice 2(8 pts):
1. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\frac{2dx}{x+2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

2. Déterminer l'équation du graphe de la solution de l'EDP suivante:

$$(x+2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

passant par la courbe initiale (γ) *définie par:*

$$x_0 = -1, \ \ y_0 = s, \ \ z_0 = \sqrt{s}\,, \qquad s \geq 0.$$

Exercice 3 (6 pts): *Soit* n *un entier naturel non nul. On considère l'EDP d'ordre 2 suivante:*

$$(n-1)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^{2n}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ny^{2n-1}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (E)$$

1. Étudier selon les valeurs de l'entier n *le type l'équation* (E).
2. Résoudre l'équation (E) *pour* $n = 1$.
3. Pour $n \geq 2$, *en posant* $X = x + y^{1-n}$ *et* $Y = x - y^{1-n}$, *l'équation* (E) *se ramène à l'équation* (F) *suivante:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0.$$

Résoudre l'équation (F) *et en déduire les solutions de* (E) *en fonction de n.*

Bon courage

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

Université de Tlemcen | Département de Mathématiques
3e Année Licence – S5 | Novembre 2021
Équations de la physique mathématique | Examen Partiel | 1H30

Corrigé

***Exercice 1(6pts)*:**

Déterminons $u: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *solution de l'EDP*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = xy^2$$

en utilisant le changement de variables suggéré $[\![\ s = x, \quad t = xy\ ]\!]$.

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} + y\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

En remplaçant dans l'équation on trouve

$$x\left(\frac{\partial u}{\partial s} + y\frac{\partial u}{\partial t}\right) - xy\frac{\partial u}{\partial t} = xy^2$$

$$x\frac{\partial u}{\partial s} = xy^2 \Longrightarrow s\frac{\partial u}{\partial s} = s\left(\frac{t}{s}\right)^2 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{t^2}{s^2} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{t^2}{s^2} \Longrightarrow u = -\frac{t^2}{s} + c(t). \quad \textbf{(1 pt)}$$

La solution générale est

$$u(x,y) = -xy^2 + c(xy) \quad \textbf{(1 pt)}$$

où c est une fonction d'une seule variable qui est au moins dérivable.

Déterminons une solution u dont le graphe contient le point $A(1,1,\ -1)$.

Le graphe de u contient le point $A(1,1,\ -1) \Leftrightarrow u(1,1) = -1$.

On a

$$u(1,1) = -1 \Leftrightarrow -1 + c(1) = -1 \Leftrightarrow c(1) = 0. \quad \textbf{(1 pt)}$$

Pour les fonctions c telles $c(1) = 0$, *le graphe de u contient le point* $A(1,1,\ -1)$.

En voici deux exemples de telles solutions u:

Pour $c(t) = \sin(\pi t)$, *alors* $u(x,y) = -xy^2 + \sin(\pi xy)$.

Pour $c(t) = t - 1,\ u(x,y) = -xy^2 + xy - 1$.

Pour les deux cas nous avons, $c(1) = 0$.

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

Exercice 2(8 pts):

1. Résolvons le système différentiel suivant:

$$\frac{2dx}{x+2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

La première équation nous donne

$$\int \frac{2dx}{x+2} = \int \frac{dy}{y}.$$

D'où

$$\ln(x+2)^2 = \ln|\lambda y|, \quad \lambda \in \mathbb{R}^* \qquad \mathbf{(1\ pt)}$$

et par suite

$$\frac{(x+2)^2}{y} = k. \qquad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

Une intégrale première est

$$U(x,y,z) = \frac{(x+2)^2}{y}, \quad x > -2, \qquad y > 0. \qquad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

De la deuxième équation, en procédant de la même manière, nous obtenons la deuxième intégrale première:

$$V(x,y,z) = \frac{z}{y}, \qquad y > 0, \qquad z > 0\ . \qquad \mathbf{(1\ pt)}$$

Ces deux intégrales premières sont fonctionnellement indépendantes, en effet

$$\frac{D(U,V)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{2(x+2)}{y} & -\frac{(x+2)^2}{y^2} \\ 0 & -\frac{z}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{2z(x+2)}{y^3} \neq 0$$

dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$*, par exemple dans* $\mathcal{V} =]-2,+\infty[\times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Les solutions du système donné sont les courbes γ_{ab} *intersection des surfaces d'équations* $U(x,y,z) = a$ *et* $V(x,y,z) = b$. **(0,5 pt)**

2. Déterminons l'équation du graphe de la solution de l'EDP suivante:

$$(x+2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

passant par la courbe initiale (γ) *définie par:*

$$x_0 = -1, \quad y_0 = s, \quad z_0 = \sqrt{s}\,, \qquad s \geq 0.$$

Le système caractéristique associé à l'EDP est

$$\frac{dx}{x+2} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{2z} \qquad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

qui est équivalent au système

$$\frac{2dx}{x+2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

déjà résolu.

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

La solution de l'EDP est donnée implicitement par la formule

$$F\big(U(x,y,z),V(x,y,z)\big)=0 \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

i.e.

$$F\left(\frac{(x+2)^2}{y},\qquad \frac{z}{y}\right)=0. \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

D'où

$$\frac{z}{y}=\varphi\left(\frac{(x+2)^2}{y}\right) \qquad \mathbf{(1\ pt)}$$

où φ est une fonction d'une seule variable, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi les solutions de l'EDP sont :

$$z(x,y)=y\varphi\left(\frac{(x+2)^2}{y}\right). \qquad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

Déterminons la solution dont le graphe passe par la courbe (γ) définie par

$$x_0=-1,\ \ y_0=s,\ \ z_0=\sqrt{s}\,, \qquad s\geq 0.$$

On a $z(x_0,y_0)=z_0$ d'où $z(-1,s)=\sqrt{s}$.

En portant dans l'expression de la fonction z nous obtenons

$$\sqrt{s}=s\varphi\left(\frac{1}{s}\right). \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

D'où

$$\varphi\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{\sqrt{s}}$$

Posons $\tau=1/s$ alors $\varphi(\tau)=\sqrt{\tau}$, **(0,5 pt)** *et la solution cherchée est*

$$z(x,y)=y\varphi\left(\frac{(x+2)^2}{y}\right)$$

$$=y\sqrt{\frac{(x+2)^2}{y}}$$

$$z(x,y)=(x+2)\sqrt{y}\,;\ \ x>-2, y>0. \qquad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

***Autre méthode**: Introduisons un nouveau paramètre dans le système caractéristique.*

$$\frac{dx}{x+2} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{2z} = dt \qquad \textbf{(1 pt)}$$

Il en découle

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{x+2} = dt \\ \dfrac{dy}{y} = 2dt \\ \dfrac{dz}{z} = 2dt \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} \ln(x+2) = t + a \\ \ln y = 2t + b \\ \ln z = 2t + c \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = Ae^{t} - 2 \\ y(t) = Be^{2t} \\ z(t) = Ce^{2t} \end{cases} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

Déterminons les constantes A, B et C.

Pour $t = 0$ *on a* $x = -1$ *d'où* $-1 = A - 2$ *et* $A = 1$.
On a $y(0) = s$ *d'où* $B = s$.
De même $z(t) = \sqrt{s}$ *donne* $C = \sqrt{s}$.

La solution de l'EDP dont le graphe passe par la courbe (γ) *est définie par*

$$\begin{cases} x = e^{t} - 2 \\ y = se^{2t} \\ z = \sqrt{s}e^{2t} \end{cases} \qquad \textbf{(1 pt)}$$

Éliminons le paramètre s:

On a $e^{t} = x + 2$ *d'où*

$$y = s(x+2)^2, \qquad z = \sqrt{s}(x+2)^2 \qquad \textbf{(0,5 pt)}$$

$$y = s(x+2)^2 \Longrightarrow s = \frac{y}{(x+2)^2} \Longrightarrow \sqrt{s} = \frac{\sqrt{y}}{x+2}.$$

En portant dans l'expression de z, nous obtenons

$$z = \sqrt{s}(x+2)^2 = \frac{\sqrt{y}}{x+2}(x+2)^2$$

i.e.

$$z(x,y) = (x+2)\sqrt{y}. \quad \textbf{(1 pt)}$$

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

Université de Tlemcen | Département de Mathématiques
3e Année Licence – S5 | Novembre 2021
Équations de la physique mathématique | Examen Partiel | 1H30

Exercice 3 (6 pts):

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'EDP d'ordre 2 suivante:

$$(n-1)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^{2n}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ny^{2n-1}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (E)$$

1. Type l'équation (E). **$(3\times 0,5\ pt)$** - *Le discriminant de l'équation est*

$$\Delta = 4(n-1)^2y^{2n}.$$

- *Ainsi si $n=1$, $\Delta = 0$ est l'équation est parabolique.*
- *Si $n\geq 2$ et $y\neq 0$, $\Delta > 0$ et l'équation est hyperbolique en dehors de l'axe des abscisses.*

2. Pour $n=1$ l'équation (E) s'écrit :

$$-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad \mathbf{(2\times 0,5\ pt)}$$

D'où

$$y\frac{\partial u}{\partial y} = C(x) \qquad (1) \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

Où C est une fonction d'une seule variable (ne dépendant que de x).

L'équation (1) peut-être regardée comme étant une EDO d'ordre 1:

$$y\frac{du}{dy} = C \Longrightarrow \frac{du}{dy} = \frac{C}{y} \Longrightarrow du = \frac{C}{y}dy \Longrightarrow u(x,y) = C(x)\ln|y| + K(x) \quad \mathbf{(1\ pt)}$$

Où K est une fonction d'une seule variable .

3. Pour $n\geq 2$, en posant $X = x + y^{1-n}$ et $Y = x - y^{1-n}$, l'équation (E) se ramène à l'équation (F) suivante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} = 0.$$

Résolution de l'équation (F):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial Y} = A(Y), \quad \mathbf{(1\ pt)}$$

où A est une fonction d'une seule variable ne dépendant que de y.

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = A(Y) \Longrightarrow u(X,Y) = B(Y) + D(X) \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

Avec B une primitive de A et D est une fonction de X. Les fonctions B et D sont de classe C^2.

Les solutions u de l'équation (E) pour $n\geq 2$ sont données par:

$$u(x,y) = B(x - y^{1-n}) + D(x + y^{1-n}) \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz